Hans U. Simon
Leonie Ryvkin

Bochum, den 16.01.20
Abgabe am 23.01.20

Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

WS 19/20

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1

Sei (Q, κ) ein parametrisiertes Problem und $\ell \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:
Wenn (Q, κ) Festparameter-behandelbar ist, so ist $(Q, \kappa)_\ell \colon = \{x \in Q | \kappa(x) = \ell\}$ in Polynomialzeit lösbar.

Aufgabe 13.2

Modifizieren Sie den Algorithmus $HS(\mathcal{H}, k)$ aus der Vorlesung so, dass ein Hitting Set der Größe k für $\mathcal{H}$ ausgegeben wird, falls eins existiert, und NIL sonst. Die Laufzeit $(\mathcal{O}(d^k \cdot \|\mathcal{H}\|))$ soll unverändert bleiben.

Aufgabe 13.3

Gegeben sei das Entscheidungsproblem $p - deg -$ INDEPENDENT-SET:

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter: $k + \Delta(G)$.
Frage: Existiert $S \subset V$ in G mit $|S| = k$, sodass keine zwei Knoten aus S benachbart sind?

Zeigen Sie, dass $p - deg -$ INDEPENDENT-SET Festparameter-behandelbar ist.
Hinweis: Konstruieren Sie die ersten k Ebenen eine Suchbaums, der, falls er vervollständigt würde, alle *maximalen* Independent Sets von G liefern würde.

Aufgabe 13.4

Gegeben sei eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij}) \in \{0,1\}^{m \times n}, i \in [m], j \in [n]$ mit Einträgen aus $\{0,1\}$. Ein *Dominating Set* für A ist eine Menge $S \subset [m] \times [n]$, sodass gilt:

- $a_{ij} = 1$ für alle $(i,j) \in S$,
- falls $a_{ij} = 1$ für ein $i \in [m]$ und ein $j \in [n]$ gilt, dann gibt es entweder ein $i' \in [m]$, sodass $(i', j) \in S$, oder es gibt ein $j' \in [n]$, sodass $(i, j') \in S$ gilt.

Das bedeutet, S ist eine Menge von 1-Einträgen, sodass jeder 1-Eintrag von A entweder in der gleichen Zeile oder in der gleichen Spalte wie ein Element aus S ist.
Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem $p-$MATRIX-DOMINATING-SET Festparameter-behandelbar ist:

Eingabe: Eine Matrix $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ sowie $k \in \mathbb{N}$.
Parameter: k.
Frage: Existiert ein Dominating Set der Größe k für A?

Hinweis: Betrachten Sie A als Adjazenzmatrix eines bipartiten Graphen. Ein Dominating Set ist dann eine Menge von Kanten, sodass jede Kante aus A mindestens einen Endpunkt mit einer Kante aus S gemeinsam hat. Zeigen Sie zunächst, dass falls ein Dominating Set der Größe k für A existiert, der zugehörige Graph nur wenige Knoten mit Knotengrad größer k hat. Konstruieren Sie einen beschränkten Suchbaum, dessen Blätter minimale Kantenmengen codieren, welche alle Kanten mit "kleinen" inzidenten Knoten überdecken. Eine solche Kantenmenge muss dann noch erweitert werden, sodass alle Kanten überdeckt werden.