Klausur zur Vorlesung
„Lineare Algebra und Geometrie II “

Ruhr-Universität Bochum
Prof. Dr. Peter Eichelsbacher

9. Juli 2007, 9.00-12.00 Uhr, 180 Minuten

Name und Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Hinweise:

- Überprüfen Sie, dass Sie eine Klausur mit 10 Aufgaben erhalten haben. Tragen Sie am besten sofort Ihre persönlichen Daten auf diesem Deckblatt ein.
- Die Lösungen der Aufgaben sind auf den dafür vorgesehenen Seiten (ggf. unter Verwendung der Rückseiten) zu notieren. Weiteres Papier steht bei der Aufsicht zur Verfügung. **Geben Sie bitte auf jedem Blatt Ihren Namen an!**
- In **jeder Aufgabe** können Sie maximal **16 Punkte** erreichen, insgesamt also maximal 160 Punkte.

Viel Erfolg!

Name: **Vorname:**

Aufgabe 1:

Gegeben sei die reelle 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 28 & -10 \\ 75 & -27 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^{37}?

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 1:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 2:

Für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$\varphi(x, y) := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4 x_2 y_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses Skalarproduktes.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 2:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 3:

Geben Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

die folgenden Größen an, ohne A auszumultiplizieren:

(a) die Determinante von A,

(b) die Eigenwerte von A,

(c) die Eigenvektoren von A,

(d) einen Grund, warum A positiv definit ist.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 3:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 4:

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Projizieren Sie den Vektor b orthogonal auf den Spaltenraum von A und bestimmen Sie die darstellende Matrix P der zugehörigen Projektionsabbildung. Auf welchen Unterraum projiziert die Matrix $E_4 - P$?

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 4:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 5:

Die Sesquilinearform φ auf $\mathbb{C}^3$ sei gegeben durch

$$\varphi(x,y) = x^T A\,\overline{y}, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 3 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist φ Hermitesch?

(b) Bestimmen Sie für diese a jeweils eine Basis von $\mathbb{C}^3$, so dass die Grammatrix eine Diagonalmatrix ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $S^T A \overline{S}$ berechnen, wenn S die Basiswechselmatrix bezeichnet.

(c) Für welche a ist φ positiv definit?

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 5:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 6:

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ derart, dass $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist und ermitteln Sie die Signatur der symmetrischen Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $P \in O(3)$ derart, dass $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 6:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 7:

Gegeben sind die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

und der reelle Vektor

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die kürzeste Lösung $v \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Hierbei verwenden Sie die Norm im $\mathbb{R}^3$, die durch das kanonische Skalarprodukt gegeben ist.

(b) Projizieren Sie den Vektor

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

orthogonal auf den Unterraum $\operatorname{im}(f_A)$, wenn f_A die durch A gegebene lineare Abbildung bezeichnet.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 7:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 8:

Es sei $A \in M(2,\mathbb{R})$. Zeigen Sie: A hat genau dann zwei verschiedene reelle Eigenwerte, falls

$$2\,\mathrm{Tr}(A^2) > (\mathrm{Tr}(A))^2$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Tr}(A)$ die Spur der Matrix A, also die Summe der Diagonalelemente.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 8:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 9:

Man bestimme die Minimalpolynome der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 9:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 10:

Es sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{C}$ und $F : V \to V$ gegegen durch

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & c \\ a & d \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von F sowie eine Basis aus Eigenvektoren.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 10:**