Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

9. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 14. Juni 2007

1. Aufgabe (7 Punkte):
Betrachten Sie den Vektorraum der Polynomabbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner 4, und bestimmen Sie eine zur Basis $(1, x, x^2, x^3)$ gehörige Orthogonalbasis $(W_0, \ldots, W_3)$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit den Hermite-Polynomen

$$H_m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m!\, 2^m \sqrt{\pi}}}\, e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}),\ \ m \in \mathbb{N}_0.$$

2. Aufgabe (7 Punkte):
Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix mit linear unabhängigen Spalten. Zeigen Sie, dass A als Produkt $A = Q\,R$ dargestellt werden kann, wobei

(a) Q eine $m \times n$-Matrix ist, deren Spalten eine orthonormierte Basis des Spaltenraums sind, und

(b) $R \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h. $r_{ij} = 0$ für $i > j$.

Hinweis: Orthonormieren Sie die linear unabhängigen Spalten von A via Gram-Schmidt und nutzen Sie diese neue Basis, indem Sie die Spalten von A in dieser Basis darstellen.

3. Aufgabe (6 Punkte):
Seien U und V Unterräume eines Euklidischen oder unitären Vektorraums W, und seien π_U bzw. π_V die orthogonalen Projektionen auf U bzw. V. Zeigen Sie:

(a) U ist orthogonal zu V genau dann, wenn $\pi_U \circ \pi_V = 0$ (oder $\pi_V \circ \pi_U = 0$) ist.

(b) Gilt $U \subset V$, so ist $\pi_U \circ \pi_V = \pi_U$.

4. Aufgabe (Präsenz):
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Interval, $\mathcal{C}^m(I)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der m-fach stetig differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{C}$ und

$$g_m(\phi, \psi) := \sum_{\nu=0}^{m} \int_I \frac{d^\nu \phi}{dt^\nu}(t) \Big(\overline{\frac{d^\nu \psi}{dt^\nu}(t)}\Big)\, dt$$

für alle $\phi, \psi \in \mathcal{C}^m(I)$. Zeigen Sie, dass g_m eine nichtdegenerierte Hermitesche Sesquilinearform ist.

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma-1 & \gamma \\ \gamma+1 & \gamma & -1 \\ \gamma & 1 & \gamma+1 \end{pmatrix}$$

orthogonal?

6. Aufgabe (Präsenz):
Zeigen Sie, dass die folgenden drei Matrizen Elemente der speziellen orthogonalen Gruppe sind:

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$