Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

8. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 6. Juni 2007, 16 Uhr

1. Aufgabe (7 Punkte):

(a) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie für alle $v, w \in V$ die Gültigkeit der Parallelogrammgleichung $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$.

(b) Es sei V ein reeller Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$, die die Parallelogrammgleichung erfüllt. Zeigen Sie, dass durch $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$ für alle $v, w \in V$ ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

Hinweis zu Teil (b): Zeigen Sie durch Anwendung der Parallelogrammgleichung auf $\|(u+v)+w\|^2$, $\|(u-w)-v\|^2$, $\|u+v\|^2$ und $\|u-w\|^2$, dass $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ für alle $u, v, w \in V$ gilt. Leiten Sie dann $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und schrittweise für $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ her. Beweisen und verwenden Sie beim letzten Schritt die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\lambda) := \langle v, \lambda w\rangle$.

2. Aufgabe (7 Punkte):

Für alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\langle x, y\rangle := 2x_1y_1 - x_1y_3 - x_1y_2 + 3x_3y_3 + 3x_2y_2 + 2x_2y_3 - x_2y_1 - x_3y_1 + 2x_3y_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie bezüglich des obigen Skalarprodukts die orthogonale Projektion des Vektors $w = (7, 6, -2)$ auf den durch $u = (3, 1, 5)$ und $v = (1, -2, 2)$ aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

3. Aufgabe (6 Punkte):

In der folgenden Tabelle sind die Meßwerte für das Gewicht eines Babys in seinem ersten Lebensmonat angegeben (in Gramm):

	1. Woche	2. Woche	3. Woche	4. Woche
1. Tag	3420	3370	3480	3850
2. Tag	3440	3390	3520	3840
3. Tag	3400	3430	3580	3890
4. Tag	3370	3470	3640	3940
5. Tag	3370	3520	3690	3990
6. Tag	3340	3520	3760	4020
7. Tag	3350	3510	3800	4030

Bitte wenden

(Bestimmung einer Ausgleichsparabel) Bestimmen Sie für die Meßwerte mittels der Methode der kleinsten Quadrate die Werte α, β und γ für den Ansatz $b(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ mit $t \in \{1, \ldots, 28\}$, wobei $b(t)$ das Gewicht am Tag t sei.

4. Aufgabe (Präsenz):
Es sei $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Der Unterraum U von $\mathbb{R}^4$ werde aufgespannt von den Vektoren $u = (1, 0, -1, 1)$ und $v = (2, 1, -1, 2)$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $w = (10, 0, 5, -5)$ auf U.

5. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie zu den Daten in Aufgabe 3 die zugehörige Regressionsgerade.

6. Aufgabe (Präsenz):
Für $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.