Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

7. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 24. Mai 2007

1. Aufgabe (8 Punkte):
Es seien A und B reelle, positiv definite Matrizen. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix A ist regulär, und A^{-1} ist positiv definit.

(b) Alle ganzzahligen Potenzen von A sind positiv definit.

(c) Die Matrix $A+B$ ist positiv definit.

2. Aufgabe (6 Punkte):
In dieser Aufgabe soll ein Punkt des Beweises von Satz 17.9 (a) im Detail ausgeführt werden. Es sei $G \in M(n,\mathbb{R})$ symmetrisch und $G^{(m)}$ bezeichne die Hauptminoren für $m \in \{1,\dots,n\}$. Es sei $\det(G^{(m)}) > 0$ für alle $m \in \{1,\dots,n\}$ und es sei S die Basiswechselmatrix des Gram-Schmidt Verfahrens, die eine obere Dreiecksmatrix ist. Zeigen Sie die Identität

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \end{pmatrix} = (S^{(m)})^T \, G^{(m)} \, S^{(m)}$$

für jedes $1 \le m \le n$, wobei $\alpha_i = \varphi(u_i, u_i)$ mit φ die zu G assoziierte reelle symmetrische Bilinearform und $(u_1,\dots,u_n)$ die orthogonale Basis nach Gram-Schmidt.

3. Aufgabe (6 Punkte):
Betrachen Sie den Vektorraum $M(n,\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$-Matrizen versehen mit der positiv definiten symmetrischen Bilinearform $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^T B)$, siehe Aufgabe 2 auf Blatt 4. Weiter sei $R \in O(n)$ fest und die lineare Abbildung $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ gegeben durch $f(A) := RA$. Zeigen Sie, dass f eine Isometrie ist.

4. Aufgabe (Präsenz):
Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf positive Definitheit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe (Präsenz):
Die beiden Bilinearformen φ und ψ auf $\mathbb{R}^3$ seien gegeben durch ihre Grammatrizen bezüglich der kanonischen Basis

$$G_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^3, \varphi)$ und $(\mathbb{R}^3, \psi)$ isometrisch sind und geben Sie eine Isometrie explizit an.

6. Aufgabe (Präsenz):

Machen Sie sich die folgenden Tatsachen klar:

(a) Für reelle symmetrische Bilinearformen ist die Signatur eine vollständige Invariante.

(b) Für Hermitesche Formen ist die Signatur eine vollständige Invariante.

(c) Für symplektische Formen bilden $\dim(V)$ und $\dim(\ker(\varphi))$ ein vollständiges Invariantensystem.

(d) Für zwei isometrische Räume sind $\dim(V)$ und $\dim(\ker(\varphi))$ Invarianten, sogenannte Isometrie-Invarianten.