Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

4. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 3. Mai 2007

1. Aufgabe (5 Punkte):
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Beweisen Sie, dass es zu jeder Bilinearform $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\varphi(v,v) = 0$ gibt.

2. Aufgabe (7 Punkte):
Für zwei reelle $(m \times n)$-Matrizen A und B sei $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)$, wobei A^{T} die Transponierte von A und $\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)$ die Spur von $A^{\mathrm{T}}B$ seien. Zeigen Sie, dass φ eine symmetrische, nichtdegenerierte Bilinearform auf dem Vektorraum der reellen $(m \times n)$-Matrizen ist, und bestimmen Sie ihre Signatur.

3. Aufgabe (8 Punkte):
Es sei $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x,y) = y_1x_2 - x_1y_2 + 2y_1x_4 - 2x_1y_4 + y_3x_2 - x_3y_2 + 3y_3x_4 - 3x_3y_4.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ eine symplektische Form ist.

(b) Bestimmen Sie die Grammatrix von φ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^4$.

(c) Bestimmen Sie $\ker(\varphi)$.

4. Aufgabe (Präsenz):

(a) Gegeben sei die Abbildung

$$M(n,K) \times M(n,K) \ni (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine symmetrische Bilinearform auf $M(n,K)$ ist.

(b) Mit H sei die Menge der Hermiteschen 2×2-Matrizen mit Spur 0 bezeichnet:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass dies ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Für $A, B \in H$ sei nun

$$\langle A, B \rangle_H := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass dies eine symmetrische Bilineraform ist, für die gilt: $\langle A, A \rangle_H \geq 0$, $A \in H$.

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Es sei φ die symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch die Grammatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{V}$ des $\mathbb{R}^3$, so dass die zugehörige Grammatrix Diagonalgestalt hat.

6. Aufgabe (Präsenz):
Es sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}((-1,1),\mathbb{R})$ der Vektorraum der auf $(-1,1)$ differenzierbaren Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $d : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto (fg)'(0)$ eine symmetrische Bilinearform ist.

(b) Bestimmen Sie $\ker(d)$.