3. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 26. April 2007

1. Aufgabe (7 Punkte):
Ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums heißt *trigonalisierbar*, wenn er durch eine obere Dreiecksmatrix dargestellt werden kann.

(a) Zeigen Sie, dass im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K jeder Endomorphismus φ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V trigonalisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus φ eines n-dimensionalen K-Vektorraums V genau dann trigonalisierbar ist, wenn φ-invariante Unterräume $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n$ von V existieren mit $\dim U_j = j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Hinweis zu (a): Wählen Sie einen Eigenvektor v von φ, und ergänzen Sie v zu einer Basis von V. Betrachten Sie nun die darstellende Matrix von φ bezüglich dieser Basis, und führen Sie einen Induktionsbeweis nach der Dimension von V.

2. Aufgabe (7 Punkte):
Es seien φ und ψ diagonalisierbare Endomorphismen des endlichdimensionalen K-Vektorraums V mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Zeigen Sie, dass φ und ψ gleichzeitig diagonalisierbar sind (d. h., dass eine Basis von V existiert, bezüglich der sowohl φ als auch ψ durch Diagonalmatrizen dargestellt werden).

Hinweis: Verwenden Sie die zweite Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus $f \in \hom(V)$ gemäß Lemma 14.12 der Vorlesung:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(f)} E(\lambda).$$

3. Aufgabe (6 Punkte):

(a) Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V und φ eine Bilinearform auf V mit Grammatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{W} = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine Basis von V ist, und bestimmen Sie die Grammatrix bezüglich der neuen Basis.

(b) Gegeben seinen $f, g \in \hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ und $g(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$. Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ eine Bilinearform ist, und bestimmen Sie die Grammatrix bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

Bitte wenden

4. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie für die Körper $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}_2$ Polynome $s(x), r(x) \in K[x]$ so, dass

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x + 1)s(x) + r(x)$$

mit $\mathrm{grad}(r(x)) < 3$ gilt.

5. Aufgabe (Präsenz):
(a) Zeigen Sie für das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im $\mathbb{R}^n$ die Eigenschaften:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, \quad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ und } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

für $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie für das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ in $\mathbb{C}^n$ die modifizierten Eigenschaften.

6. Aufgabe (Präsenz):
Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Jede Bilinearform $g\colon V \times V \to K$ kann eindeutig dargestellt werden als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform.