Vorkurs Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum

Prof. Dr. Peter Eichelsbacher

September 2006

Inhaltsverzeichnis

Ein Vorkurs ist eine Einführung in die Mathematik,

– er ist kein Schnelldurchgang durch den Inhalt der drei Oberstufenjahre,

– er soll allen den Einstieg ins Studium erleichtern.

Inhalt der ersten beiden Wochen sind die Themenbereiche *Logik* und *Mengenlehre*, die *Sprache*, in der heute Mathematik geschrieben und gesprochen wird. Diese Einführung soll Vertrauen in die Fundamente der mathematischen Wissenschaft wecken und Raum für Skepsis lassen. Es geht weiter um den *Abbildungsbegriff* und die *natürlichen Zahlen* sowie um *Induktion*. Es werden verschiedene *Beweisstrukturen* dargestellt.

Ein paar Zitate, die man zunehmend schön finden wird:

> Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.
>
> J. W. v. Goethe

> Die Mathematik steht ganz falsch im Rufe, untrügliche Schlüsse zu liefern. Ihre ganze Sicherheit ist weiter nichts als Identität. Zwei mal zwei ist nicht vier, sondern es ist eben zwei mal zwei, und das nennen wir abkürzend vier. Vier ist aber durchaus nichts Neues. Und so geht es immer fort bei Ihren Folgerungen, nur dass man in den höheren Formeln die Identität aus den Augen verliert.
>
> J. W. v. Goethe 1826

> Es ist ein herrliches Gefühl, die Einheitlichkeit eines Komplexes von Erscheinungen zu erkennen, die der direkten sinnlichen Wahrnehmung als ganz getrennte Dinge erscheinen."
>
> Albert Einstein 1901

In dem Werk *Entwicklung und Fortschritt in der Mathematik* von J. Dieudonne lesen wir:

Die Haupttriebkraft der Mathematik ist inneren Ursprungs, sie entspringt dem tieferen Nachdenken über die Natur der zu lösenden Probleme, bei dem die Herkunft dieser Probleme keine große Rolle spielt. Mathematische Theorien beginnen mit der Untersuchung spezieller Objekte, Zahlen, Figuren oder Funktionen und somit auch mit der Betrachtung von Darstellungsverfahren. Man analysiert augenfällige äußere Analogien und tiefer verborgene Eigenschaften. Dabei werden die Klassen von Objekten zunehmend umfangreicher und es treten Beziehungen in Erscheinung, die viel subtiler sind als die ursprünglich beobachteten zufälligen Ähnlichkeiten. Es ist häufig verblüffend, in wie vielen Fällen die gemeinsame Natur gewisser Begriffe und ihre Darstellungsverfahren, die uns heute evident erscheinen, jahrelang nicht erkannt, ja nicht einmal vermutet wurden.

In der Mathematik versucht man, relevante Aspekte einer konkreten Situation in einem mathematischen Modell zu erfassen, und dies durch Abstraktion von eventuellen schmutzigen Details, und andererseits durch mathematische Idealisierung, also durch eine Erweiterung der Situation mit Hilfe gedanklicher oder formaler Grenzprozesse, die es erlauben, die relevanten Phänomene schärfer zu erkennen. Das Modell wird dann mathematisch untersucht, die Ergebnisse müssen anschließend an der Wirklichkeit gemessen werden (Vorhersage, Überprüfung und Korrektur).

KAPITEL 1

Aussagenlogik und Beweismethoden

Gebraucht der Zeit, sie geht so schnell von hinnen,
Doch Ordnung lehrt Euch Zeit gewinnen.
Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichterliere hin und her.

J. W. v. Goethe

Genug der Zitate und Andeutungen. Hier geht es nun zu wie in einer Vorlesung:

1.1 Aussagenlogik

1.1 Definition Eine *Aussage* ist ein als Satz formulierter Gedanke, dem man auf sinnvolle Weise einen Wahrheitswert zuordnen kann. Als Werte sind nur "wahr" oder "falsch" zugelassen ("zweiwertige Logik").

Im strengen mathematischen Sinn ist dies keine Definition. Die obige "Erklärung" ist eine Hilfe, um zwischen Aussagen und Nicht-Aussagen unterscheiden zu können. Am besten lernen wir an Hand von - möglichst vielen - Beispielen.

1.2 Beispiele

(1) 625 ist eine Quadratzahl

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ (Was sind a, b, c? Wenn dies klar ist, dann liegt eine Aussage vor. Vielleicht ist es schwer, den Wahrheitswert zu bestimmen: $a^n + b^n = c^n$)

(3) Wie spät ist es? (grammatikalisch richtiger Satz, aber Fragesatz!)

(4) Morgen regnet es. (ohne Ort und Zeit nicht festlegbar)

(5) Wo ist HZO 50? (siehe oben)

(6) Auf dem Mond wachsen Sonnenblumen.

In der Hauptsache sind wir an mathematischen Aussagen interessiert. Gegebene Aussagen kann man auf vielfältige Weise miteinander verknüpfen und so zu neuen Aussagen kommen.

1.3 Beispiele

(1) Sie zahlen Studiengebühren und ich habe 3 Kinder.

(2) Der Dekan leitet die Fakultät oder er spielt Fußball.

(3) Wenn ich morgen nicht krank bin, komme ich zum Vorkurs.

Wir präzisieren dies. Für den Begriff "Verknüpfungen" sagen wir auch *Junktionen.* Im Folgenden seien A, B, C Aussagen.

1.4 Definition Unter der *Konjunktion* zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \wedge B (A \,\text{und}\, B)$, die genau dann wahr ist, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

(In der Wahrheitstafel bezeichne w wahr, f falsch.)

1.5 Beispiele

(1) 18 ist eine gerade Zahl und durch 3 teilbar. (w)

(2) 7 ist eine Primzahl und gerade. (f)

1.6 Definition Unter der *Disjunktion* zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \vee B$ ($A \,\text{oder}\, B$), die genau dann wahr ist, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen wahr ist.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.7 Beispiel In Beispiel 1.5 (2) ist $A \vee B$ wahr.

1.8 Bemerkung Eine logische Disjunktion ist auch dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind ("nicht ausschließender Sinn").

1.9 Definition Unter der *Negation* einer Aussage versteht man die Aussage $\neg A$ (nicht A), die genau dann wahr ist, wenn A (selbst) falsch ist.

A	$\neg A$
w	f
f	w

1.10 Beispiele

(1) 4 ist ungerade: 4 ist gerade

(2) Dieser Stein ist schwer: Dieser Stein ist nicht schwer. (nicht etwa: Dieser Stein ist leicht.)

(3) weise: nicht weise, ...

(4) Es sind mehr Studenten als Studentinnen im Vorkurs: Es sind mindestens so viele Studentinnen wie Studenten im Vorkurs.

1.11 Definition Unter der *Implikation* $A \Rightarrow B$ (in Worten: A impliziert B) versteht man $B \vee (\neg A)$.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Also: Wenn A die Aussage B impliziert und A wahr ist, muss B zwangsläufig wahr sein! Man spricht von einer logischen Folgerung; A nennt man *Voraussetzung,* oder *Prämisse* , B nennt man *Behauptung* oder *Conclusio.*

Eine logische Verknüpfung kann auch dann gebildet werden, wenn die Prämisse falsch ist!

1.12 Beispiele

(1) $(1 = 0) \Rightarrow (3 \geq 4)$ ist wahr

(2) Wenn $2 \cdot 2 = 5$ ist, bin ich der Papst. [

(1) und (2): Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern!

(3) In der Euklidischen Geometrie beträgt die Winkelsumme im Dreieck immer 180°. (Prämisse?)

(4) $A \wedge B \Rightarrow A$ ist eine wahre Implikation.

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow A$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

1.13 Definition Unter der *logischen Äquivalenz*

$$A \Leftrightarrow B \ (A \text{ gilt genau dann, wenn } B \text{ gilt})$$

versteht man die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Zwei Aussagen sind also genau dann logisch äquivalent, wenn sie den gleichen Wahrheitswert besitzen.

1.14 Definition Aussagen, die aufgrund ihrer logischen Struktur immer wahr sind, heißen *Tautologien.*

1.15 Beispiele

(1) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee (\neg A))$

(2) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

(3) de Morgan'sche Regeln:
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
(Negation der Disjunktion: Konjunktion von Negationen)

(4) Kommutativgesetze
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

(5) Assoziativgesetze
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

(6) Distributivgesetze
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
So ist z.B.

$$\begin{aligned} A \wedge (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow A \wedge (B \vee \neg A) \\ &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg A) \\ &\Leftrightarrow A \wedge B, \end{aligned}$$

denn der zweite Teil ist immer falsch. Dies ist die logische Grundlage für die

(7) Abtrennungsregel
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

(8) Syllogismus-Regel
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(9) Kontrapositionsgesetz
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Wir zeigen ein Beispiel für eine Beweisführung:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

Da in den letzten beiden Spalten gleiche Wahrheitswerte stehen, handelt es sich um eine Tautologie.

1.16 Satz *Ist A eine Tautologie und $A \Leftrightarrow B$ wahr, so ist auch B eine Tautologie.*

Beweis: Erinnere

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Nur in der ersten Zeile sind A und $A \Leftrightarrow B$ gleichzeitig wahr. Aber dort ist auch B wahr. $\square$

1.2 Prädikatenlogik

Wir betrachten Aussagen der Form $A(x)$, die eine Variable x enthalten, und bei der einem Objekt x aus einer "Grundgesamtheit G" eine Eigenschaft (Prädikat) zugesprochen wird. Für festes x ist $A(x)$ eine Aussage.

1.17 Beispiele

(1) $x^2 = 1$

(2) x ist Studentin an der RUB

(3) $x^2 + y^2 = z^2$, x, $y\, z \in \mathbb{Z}$; logische Prädikate mit mehreren Variablen x, y, z

Existenzquantor $\exists$, Allquantor $\forall$:

1.18 Definition Es seien $A(x)$, $B(x)$ Aussageformen, logische Prädikate. Dann ist $\exists_x A(x)$ ("es existiert ein x mit $A(x)''$, "es existiert ein x, so dass $A(x)$ wahr ist") eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn es ein x gibt, für das $A(x)$ eine wahre Aussage ist.
$\forall_x B(x)$ ("für alle x gilt $B(x)$") ist eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $B(x)$ für alle x aus dem Grundbereich G wahr ist.
(expliziter: $\exists_{x \in G} A(x)$; $\forall_{x \in G} B(x)$)

1.19 Beispiele

(1) $\exists_{x \in \mathbb{Q}} x^2 = 2$

(2) $\forall_{x \geq 2} x^2 \geq 4$

(3) $\forall_{x \in \mathbb{Z}} (\exists_{y \in \mathbb{Z}} 3x - y = 2)$

1.20 Satz *(siehe Übung 10, Blatt 1)*

$$\neg(\exists_x A(x)) \Leftrightarrow \forall_x(\neg A(x))$$
$$\neg(\forall_x A(x)) \Leftrightarrow \exists_x(\neg A(x))$$

Die Aussage $\exists_x A(x)$ ist genau dann falsch, wenn $A(x)$ falsch ist für alle x; ebenso ist $\forall_x A(x)$ genau dann falsch, wenn es ein x gibt, für das $A(x)$ falsch ist.

Sprachlich sind die obigen Negationen mit ein wenig Übung klar:
Es gibt einen kahlen Einwohner der Stadt Z. Negation: Kein Einwohner von Z ist kahl.
Jeder Hörer dieses Vorkurses trägt eine Brille. Negation: Mindestens ein Hörer dieses Vorkurses trägt keine Brille.

Prädikate mit mehreren Variablen ermöglichen Formen wie $\forall_x \exists_y A(x, y)$ oder $\forall_x \exists_y \forall_z A(x, y, z), \ldots$. Aber $\forall_{x \in F} \exists_{y \in G} A(x, y)$ ist nicht das gleiche wie $\exists_{y \in G} \forall_{x \in F} A(x, y)$. Dazu ein Beispiel:

1.21 Beispiel $A(x, y) : x - y^2 = 0$. Dann bedeutet $\forall_{x \geq 0} \exists_{y \in \mathbb{R}} A(x, y)$, dass es zu jeder nichnegativen reellen Zahl x eine Lösung von $x - y^2 = 0$ gibt. Diese

Aussage ist wahr. $\exists_{y\in\mathbb{R}}\,\forall_{x\geq 0}\, x-y^2=0$ bedeutet hingegen, dass es eine reelle Zahl y gibt mit $x-y^2=0$ für alle $x\geq 0$. Dies ist eine offensichtlich falsche Aussage.

Wir betrachten ein klassisches Beispiel aus der Analysis, den Begriff der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen einen Limes a:

1.22 Definition Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen den Limes a, wenn für alle $\varepsilon>0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)>0$ existiert, so dass für alle $n\geq N(\varepsilon)$ gilt: $|a_n-a|\leq\varepsilon$.

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{N(\varepsilon)\in\mathbb{N}}\,\forall_{n\geq N(\varepsilon)}(|a_n-a|\leq\varepsilon).$$

Um zu zeigen, dass eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nicht gegen a konvergiert, müssen wir beweisen:

$$\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{N\in\mathbb{N}}\,\exists_{n\geq N}\,(|a_n-a|>\varepsilon).$$

1.3 Beweismethoden

In der Mathematik wird eine wahre Aussage oft als *Satz* bezeichnet. Man verwendet darüber hinaus auch den Begriff *Theorem* (ein besonders wichtiger Satz), *Lemma* (Hilfssatz) und *Korollar* (eine direkte oder leichte Folgerung aus einem unmittelbar vorangehenden Satz). Besonders häufig treten Sätze in der Form $A\Rightarrow B$ auf, also wahre Aussagen der Form $\neg A\vee B$. Es ist, wie wir schon andiskutiert hatten, nur der Fall interessant, in dem A wahr ist. In diesem Fall ist $A\Rightarrow B$ genau dann wahr, wenn B wahr ist.
Um unter der *Voraussetzung* der Richtigkeit der Aussage A zu zeigen, dass $A\Rightarrow B$ richtig, d.h. der Satz $A\Rightarrow B$ gültig ist, muss man beweisen, dass die *Behauptung* B richtig ist.

Direkter Beweis: Verwendet die Tautologie

$$(A\Rightarrow C)\wedge(C\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow B).$$

Man zerlegt die Aussage in bereits als richtig erkannte Teilaussagen. Dieses Vorgehen wiederholt man gegebenenfalls.

Indirekter Beweis: Hier nimmt man an, die Behauptung B sei falsch, es gelte $\neg B$. Dann leitet man unter der Annahme A und $\neg B$ mittels richtiger Aussagen die Wahrheit einer Aussage C ab, von der man bereits weiß, dass sie falsch ist. Aus diesem Widerspruch folgt, dass $\neg B$ nicht richtig sein kann.

$$(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow\big((A\wedge\neg B)\Rightarrow(C\wedge\neg C)\big)$$

Das überprüfen wir mittels der Wahrheitstafel:

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$C \wedge \neg C$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$	$A \Rightarrow B$
w	w	w	f	f	f	w	w
w	w	f	f	f	f	w	w
w	f	w	w	w	f	f	f
w	f	f	w	w	f	f	f
f	w	w	f	f	f	w	w
f	w	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	f	f	w	w
f	f	f	w	f	f	w	w

Die letzten beiden Spalten haben identische Wahrheitswerte!

Illustration:

1.23 Satz *Sei $x^2 = 2$; dann ist x keine rationale Zahl.*
$A : x^2 = 2$.
B : *x ist keine rationale Zahl.*
Zu zeigen: $A \Rightarrow B$ ist wahr.

1.24 Lemma *Eine ganze Zahl ist genau dann gerade (d.h. durch 2 teilbar), wenn ihr Quadrat gerade ist.*

Beweis: Sei k eine gerade, ganze Zahl. Also hat k die Darstellung $k = 2l$, wobei l eine ganze Zahl ist. Also gilt $k^2 = 2(2l^2)$, also ist k^2 eine gerade Zahl.
Sei k eine ungerade, ganze Zahl. Dann hat k die Darstellung $k = 2l + 1$,wobei l eine ganze Zahl ist. Nun gilt $k^2 = (2l + 1)^2 = 2(2l^2 + 2l) + 1$, somit ist k^2 eine ungerade Zahl.
Mit den Bezeichnungen $A :$ k ist gerade und $B :$ k^2 ist gerade
haben wir somit $A \Rightarrow B$ und $\neg A \Rightarrow \neg B$ gezeigt. Weiter wissen wir, dass

$$\big((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)\big) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

gilt. □

Beweis von Satz 1.23: Es sei die Aussage $A :$ $x^2 = 2$ wahr und $B :$ x ist nicht rational sei falsch. Dann ist die Aussage $\neg B$: x ist rational. Also hat x die Darstellung $x = \frac{k}{m}$ mit $k, m \in \mathbb{Z}$; $m \neq 0$. Wir nehmen A und $\neg B$ an. Ohne Einschränkung sind k und m teilerfremd, denn sonst kürzen wir. Es sei nun C die Aussage m ist ungerade.
Wir zeigen: $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$:
Mit $x^2 = 2$ und $x = \frac{k}{m}$ folgt $k^2 = 2m^2$. Also ist nach Lemma 1.24 k gerade, also m ungerade (wir hatten einen gekürzten Bruch angenommen). Wenn k gerade ist, hat es eine Darstellung $k = 2l$ mit $l \in \mathbb{Z}$.
Dann folgt mit $x^2 = 2$ und $x = \frac{2l}{m}$: $\frac{(2l)^2}{m^2} = 2$, also $2l^2 = m^2$. Also ist m nach dem obigen Lemma gerade. Also ist $\neg C$ wahr. □

KAPITEL 2

Grundbegriffe der Mengenlehre

Georg Cantor (1845 - 1918) schrieb am 29. November 1873 in einem Brief an Richard Dedekind:

> Kann man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ so der Gesamtheit der positiven reellen Zahlen zuordnen, dass jeder natürlichen Zahl n eine und nur eine reelle Zahl entspricht?

Cantor verneinte dies am 7. Dezember 1873. $\mathbb{R}$ ist nicht-abzählbar. Dies war die Geburtsstunde der Mengenlehre.

2.1 Definition (Cantor, 1895) Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Dies ist wieder eine Definition, die keine ist! Auf ein Axiomensystem verzichten wir hier!

Mengen bezeichnen wir mit Großbuchstaben, Elemente mit Kleinbuchstaben. Ist a Element von M, so schreiben wir $a \in M$.

2.2 Beispiele

(1) Beschreibung einer Menge durch Aufzählen der Elemente
$\{1, 2, 3\}$; $\{\text{blau, grün, gelb}\}$
Es kommt nicht auf die Reihenfolge an.
$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
Weiter $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$.
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

(2) Beschreibung einer Menge durch eine Aussageform $A(x)$ (logisches Prädikat):
$M = \{x | A(x)\}$ “die Menge aller x mit $A(x)$ wahr”
$\mathcal{P} = \{x | x \text{ ist Primzahl}\}$
$\{x | (x \in \mathcal{P}) \wedge (x \text{ ist ein Teiler von } 30)\} = \{2, 3, 5\}$
$\{x | ((k = 0) \vee (k \in \mathbb{N})) \wedge (x = 2k + 1)\}$ die Menge der ungeraden, positiven ganzen Zahlen

2.3 Definition Zwei Mengen M und N heißen gleich ($M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

$$M = N :\Leftrightarrow \big(((x \in M) \Rightarrow (x \in N)) \wedge ((x \in N) \Rightarrow (x \in M))\big)$$

2.4 Definition Eine Menge T heißt *Teilmenge* von M (in Zeichen $T \subset M$), wenn jedes Element von T auch ein Element von M ist.

$$T \subset M \Leftrightarrow ((x \in T) \Rightarrow (x \in M)).$$

Mit dem Symbol $\emptyset$ wird die leere Menge bezeichnet, also die Menge, die kein Element hat. $x \in \emptyset$ ist immer falsch. $\neg(x \in \emptyset)$ ist immer wahr (Tautologie). Für $\neg(x \in M)$ schreiben wir $x \notin M$.

Russel'sche Antinomie (Widerspruch):
(Bertrand Russel, 1872 - 1970, britischer Philosoph, Logiker, Mathematiker, erhielt 1950 den Nobelpreis für Literatur)

> (Widersprüche der vage gehaltenen Mengendefinition)
>
> Es war einmal ein Dorfbabier, der hängte in sein Fenster ein Schild mit folgender Aufschrift: "Ich rasiere jeden Mann im Ort, der sich nicht selbst rasiert."
> Ein Fremder fragte sich: Rasiert er sich denn selbst?
> Rasierte er sich selbst, so dürfte er sich nicht rasieren. Rasierte er sich aber nicht selbst, so müsste er sich doch rasieren!

$$M = \{S : S \text{ ist Menge}, S \notin S\}$$

(Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten.)
Falls $M \in M$, so ist $M \notin M$, also kann $M \in M$ nicht gelten. Also muss $M \notin M$ gelten, dann ist M aber in M : $M \in M$.
Der Umgang mit dem Mengenbegriff müsste daher auf eine solide Grundlage gestellt werden. Dies führte zur Entwicklung des Zermelo-Axiomensystems. Dort kann die Menge aller Mengen keine erlaubte Menge sein. Wir befassen uns damit nicht.

2.5 Definition Die Menge aller Teilmengen von M wird *Potenzmenge* genannt. $\mathcal{P}(M) := \{T | T \subset M\}$.

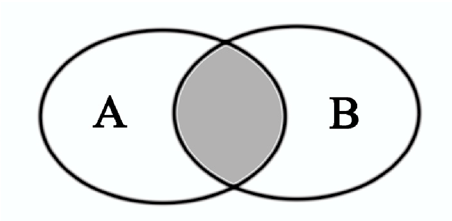
Sind A und B Mengen, so heißt
$A \cup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$ *Vereinigung* von A und B

$A \cap B := \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$ *Durchschnitt* von A und B
$A \setminus B := \{x|(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ *Differenz* von A und B

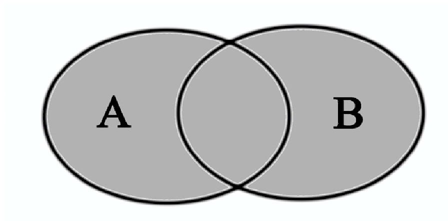
Ist G eine gegebene Grundmenge und $A \subset G$, so heißt $A^C := G \setminus A$ *Komplement* von A in G.

2.6 Beispiele $M = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$
$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, da $\emptyset \subset \emptyset$.
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$

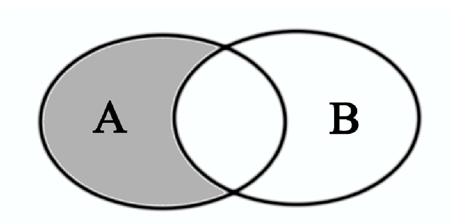
Veranschaulichung mittels *Venn-Diagrammen:*
(VENN, 1834 - 1923, Priester, später Professor für Logik und Naturphilosophie in Cambridge)



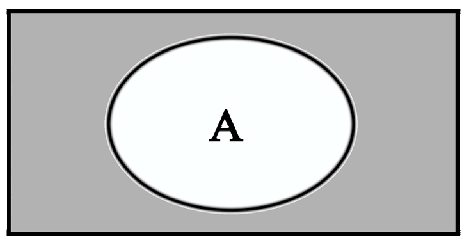
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



A^C

2.7 Satz *Für drei Mengen A, B und C gelten die folgenden Regeln:*

(1) *Kommutativgesetze*
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

(2) *Assoziativgesetze*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) *Distributivgesetze*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Beweis: (1)

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in B \cup A. \end{aligned}$$

(3), erste Regel: sei $x \in A \cup (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in A$ oder $x \in B \cap C$
$\Rightarrow x \in A$ oder ($x \in B$ und $x \in C$)
$\Rightarrow x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

umgekehrt: sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$\Rightarrow x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$
$\Rightarrow$ ($x \in A$ oder $x \in B$) und ($x \in A$ oder $x \in C$)
$\Rightarrow x \in B \cap C$ oder $x \in A$ (für $x \in A$ gilt dies sicher, ist $x \notin A$, so ist $x \in B$ und $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$)
$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

Die übrigen Beweise verlaufen ähnlich.

2.8 Satz *Es seien A, B zwei Mengen und G eine Menge mit $A \subset G$ und $B \subset G$. Dann gilt:*

(1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

(2) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

(3) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus B = A$

Beweis-Beispiel (2)

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^C &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \quad \text{de Morgan} \\ &\Leftrightarrow x \in A^C \vee x \in B^C \\ &\Leftrightarrow x \in A^C \cup B^C \end{aligned}$$

Für zwei Objekte x, y heißt die Menge $\{x, y\}$ ein *ungeordnetes Paar;* dies liegt an $\{x, y\} = \{y, x\}$. Nun wollen wir *geordnete Paare* (x, y), bei denen die Reihenfolge eine Rolle spielt, betrachten. Es soll also $(x, y) \neq (y, x)$, falls nicht $x = y$.

2.9 Definition Seien x_1, y_1, x_2, y_2 gegebene Objekte, so gilt $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

2.10 Bemerkung Wir haben das geordnete Paar somit aber nicht definiert. Kuratowski definierte

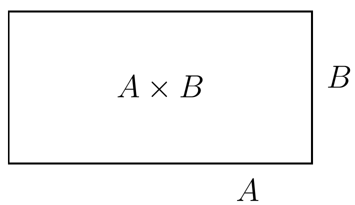
$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

2.11 Definition Für zwei Mengen A und B definieren wir das *cartesische Produkt*

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

(benannt nach René Descartes, 1596 - 1650).

Wir präsentieren A, B durch gerade Linien, $A \times B$ durch die Rechtecksfläche.



2.12 Satz *Gegeben seien Mengen A, B und C. Dann gilt:*

(1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(4) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Beweis: (1) $(x, y) \in (A \cup B) \times C$
$\Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$
$\Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$
$\Rightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$
$\Rightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C)$
$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
Es gilt überall sogar $\Leftrightarrow$, also (1) bewiesen. $\square$

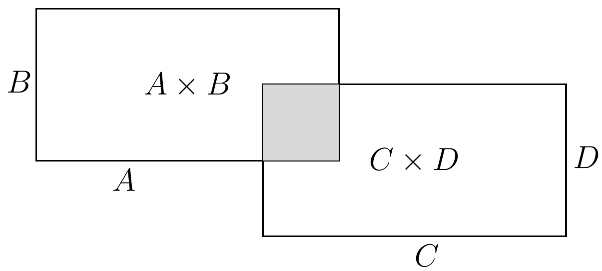
2.13 Satz *Gegeben seien 4 Mengen A, B, C, D. Dann gilt:*

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \quad &\Leftrightarrow \quad ((x,y) \in A \times B) \wedge ((x,y) \in C \times D) \quad \text{(Def. von} \cap\text{)}\\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \quad \text{(Def. von} \times\text{)}\\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \cap C) \wedge (y \in B \cap D) \qquad \text{(Tautologie)}\\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \qquad \text{(Def. von} \times\text{).}
\end{aligned}$$

□



KAPITEL 3

Körperaxiome und Anordnung

Die Zahlbereiche, die man üblicherweise in der Schule behandelt, reichen von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen über die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bis hin zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Es ist möglich, all diese Zahlbereiche, aufbauend auf der Mengenlehre, zu *konstruieren.* Damit wäre auch die Existenz bewiesen. Diesen Weg wollen wir nicht einschlagen. Stattdessen wollen wir, von der anschaulichen Vorstellung geleitet, ein *Axiomensystem* für $\mathbb{R}$ aufstellen. Daniel Hilbert (1862 - 1943) gilt als Vater der modernen axiomatischen Methode, wonach eine mathematische Disziplin aufgebaut ist auf wenigen Grundbegriffen und auf einigen wenigen Grundtatsachen über diese Begriffe, die als wahr angenommen und *Axiome* genannt werden.

"Die reellen Zahlen bilden einen *angeordneten Körper,* den wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen." Dies wollen wir genauer entwickeln:

3.1 Körperaxiome

In $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen definiert, die Addition und die Multiplikation.

Durch die *Addition* wird jedem $(x, y) \in \mathbb{R}$ genau eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zugeordnet, die mit $x + y$ bezeichnete *Summe* von x und y. Diese erfüllt die folgenden Axiome:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$

(A2) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, das *Nullelement* oder die *Null,* so dass $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A3) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.

(A4) $x + y = y + x$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Erste Folgerungen aus den Axiomen:

3.1 Folgerung Es gibt nur ein Nullelement in $\mathbb{R}$. D.h.: gilt für $0' \in \mathbb{R}$ $x + 0' = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann folgt $0' = 0$.

Beweis: $0' \overset{(A2)}{=} 0' + 0 \overset{(A4)}{=} 0 + 0' \overset{Voraus.}{=} 0.$ □

3.2 Folgerung Aus $x + y = 0$ und $x + y' = 0$ folgt $y = y'$.

Beweis: $y' \overset{(A2)}{=} y'+0 \overset{(A4)}{=} 0+y' \overset{Vor.}{=} (x+y)+y' \overset{(A1)}{=} x+(y+y') \overset{(A4)}{=} x+(y'+y) \overset{(A1)}{=} (x+y')+y \overset{Vor.}{=} 0+y \overset{(A4)+(A2)}{=} y$ $\square$

3.3 Definition $-x \in \mathbb{R}$ ist das nach Folgerung 3.2 durch $x \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Element mit $x + (-x) = 0$. $-x$ (minus x) ist das *Negative* zu x.

$$b - a := b + (-a); \quad -a + b := (-a) + b$$

3.4 Satz

(1) $0 = -0; \quad x = -(-x)$

(2) *Zu jedem Paar* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $a + x = b$. *Es ist* $x = b - a$.

(3) *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $-(a + b) = -a - b$.

Beweis: (1) $0 + 0 \overset{(A2)}{=} 0$. Mit Definition 3.3 und Folgerung 3.2 folgt $0 = -0$. Weiter ist $-x + x \overset{(A4)}{=} x - x = 0$. Also $-(-x) = x$.
(2) $a + (b - a) = a + (-a + b) = (a - a) + b = 0 + b = b$. Aus $a + x = b$ und $x \in \mathbb{R}$ folgt andererseits $x = x + (a - a) = (x + a) - a = b - a$.
(3) ist eine Übung. $\square$

Durch die Multiplikation wird jedem $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau ein Element aus $\mathbb{R}$ zugeordnet, das mit $x \cdot y$ bezeichnete *Produkt* von x und y. Wir lassen den Multiplikations-Punkt im folgenden weg. Für die Multiplikation gelten die folgenden Axiome:

(M1) $(xy)z = x(yz)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$

(M2) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, das *Einselement* oder die *Eins,* so dass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(M3) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1$.

(M4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = yx$.

3.5 Satz

(1) *Gilt für* $1' \in \mathbb{R}$ $x1' = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *dann folgt* $1' = 1$.

(2) *Aus* $x \neq 0$ *und* $xy = xy' = 1$ *folgt* $y = y'$.

Beweis: (1) $1' \overset{(M2)}{=} 1' \cdot 1 \overset{(M4)}{=} 1 \cdot 1' \overset{Vor.}{=} 1$.
(2) $y' = 1y' = (xy)y' = x(yy') = x(y'y) = (xy')y = 1y = y$. $\square$

3.6 Definition Zu $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $x^{-1} \in \mathbb{R}$ definiert durch $x(x^{-1}) = 1$. x^{-1} ist das *Inverse* zu x.

3.7 Satz *Zu jedem Paar $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $ax = b$; es ist $x = a^{-1}b$.*

Der Beweis des Satzes ist eine Übung.

Addition und Multiplikation sind durch das Axiom des *Distributivgesetzes* verbunden:

(D) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x(y + z) = xy + xz$.

3.8 Definition Eine Menge M zusammen mit einer Addition $+$ und einer Multiplikation $\cdot$, die den Axiomen (A1) - (A4), (M1) - (M4) und (D) genügt, heißt ein *Körper*. Bezeichnung $(M, +, \cdot)$. Im Folgenden meinen wir den Körper der reellen Zahlen und bezeichnen ihn mit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

3.9 Satz *Für alle x, y, z des Körpers $\mathbb{R}$ gilt $(x + y)z = xz + yz$. Für alle Elemente x des Körpers $\mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ und $(-1)x = -x$. Für Elemente a, b des Körpers $\mathbb{R}$ gilt $a \cdot b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$.*
Weiter gelten für $a, b, \in \mathbb{R}$
$-ab = (-a)b = a(-b),\ ab = (-a)(-b),\ b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$.
Aus $a \neq 0$ folgt $a^{-1} \neq 0$ und $(a^{-1})^{-1} = a,\ (-a)^{-1} = -a^{-1}$.

Der Beweis des Sates ist eine Übung.

3.10 Definition Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definieren wir den *Bruch*

$$\frac{b}{a} := a^{-1}b =: b/a \quad \text{“Bruch”}$$

3.11 Satz *Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $db \neq 0$. Dann gilt*

(1) $\frac{b}{b} = 1$

(2) $\frac{a}{b} = \frac{da}{db}$

(3) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

(4) $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(5) *Falls zusätzlich $c \neq 0$, so gilt $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$.*

Beweis: (3) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = b^{-1}a + d^{-1}c = (bd)^{-1}(da) + (db)^{-1}(bc) = \frac{ad+bc}{bd}$ $\square$

3.2 Anordnung

Es sei $M := (M, +, \cdot)$ ein Körper. R kann *angeordnet* werden, wenn es eine Teilmenge P von M gibt mit den Eigenschaften

(AO1) $(-P) \cap P = \emptyset,\ M = (-P) \cup \{0\} \cup P$, wobei $-P := \{x \in M | -x \in P\}$

(AO2) Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

Besitzt M eine Teilmenge P mit (AO1) und (AO2), dann ist $(M, +, \cdot, P)$ bzw. (M, P) ein *angeordneter Körper*. P ist die Menge der *positiven,* $-P$ die Menge der *negativen* Elemente des angeordneten Körpers M. Wir bezeichnen mit $(\mathbb{R}, P)$ den angeordneten Körper der reellen Zahlen, und betrachten in der Folge diesen, obwohl alle Resultate für einen beliebigen angeordneten Körper gelten. Gibt es den angeordneten Körper der rellen Zahlen?

3.12 Satz

(1) *Für* $(\mathbb{R}, +, \cdot, P)$ *ist* $0 \notin (-P) \cup P$.

(2) *Für alle* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \neq 0$ *ist* a^2 *positiv.*

(3) 1 *ist positiv. Ist* $x \in \mathbb{R}$ *positiv, dann auch* x^{-1}.

Beweis: (1) Bekannt ist $0 = -0$; dann würde $0 \in (-P) \cup P$ bedeuten, dass $0 \in (-P) \cap P$, im Widerspruch zu (AO1).
$a \in P$ oder $-a \in P$; es gilt $a^2 = (-a)^2$, also folgt (2) aus (AO2).
(3) $1 = 1^2$; wäre x^{-1} negativ, dann $-x^{-1}$ positiv, also $(-x^{-1}) \cdot x = -(x^{-1}x) = -1$ positiv, Widerspruch zu 1 positiv. Da $x^{-1} \neq 0$, folgt x^{-1} positiv. $\square$

3.13 Definition P sei die Menge der positiven Elemente des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setzen wir $x < y$ bzw. $y > x$, wenn $y - x \in P$ gilt.

3.14 Satz *Im angeordneten Körper* $(\mathbb{R}, P)$ *gelten:*

(1) $a > 0 \Leftrightarrow a \in P$

(2) *Für jedes Paar* $a, b \in \mathbb{R}$ *ist genau eine der drei Beziehungen wahr:* $a < b, a = b, a > b$ *(Trichotomie - Gesetz)*

(3) *Aus* $a < b$ *und* $b < c$ *folgt* $a < c$ *(Transitivität)*

(4) *Aus* $a < b$ *folgt* $a + c < b + c$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$.

(5) *Aus* $a < b$ *folgt* $ac < bc$ *für alle* $c > 0$.

(6) $a^2 > 0$ *für alle* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $1 > 0$.

(7) *Aus* $a > 0$ *folgt* $a^{-1} > 0$.

(8) *Aus* $0 < a < b$ *folgt* $a^{-1} > b^{-1} > 0$.

Wir können jetzt zeigen, dass es außer 0 und 1 noch weitere Zahlen gibt: $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, $4 := 3+1, \ldots \Rightarrow 0 < 1 < 2 < 3$ wegen (3) und (4), und mit (8) $0 < 1/3 < 1/2 < 1$.

3.15 Definition P sei die Menge der positiven Elemente des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$. Setze $\mathbb{R}_+ = \{0\} \cup P$ und $\mathbb{R}_- = -P \cup \{0\}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze $x \leq y$, wenn $y - x \in \mathbb{R}_+$. $x \leq y$ ist gleichbedeutend mit $y \geq x$.

3.16 Definition $\mathbb{R}$ sei ein angeordneter Körper. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $|a| \in \mathbb{R}$ erklärt durch

$$|a| = \begin{cases} a\,, & \text{falls } a \in \mathbb{R}_+ \\ -a\,, & \text{falls } a \in -P. \end{cases}$$

$|a|$ heißt *Betrag* oder *Absolutbetrag* von a.

3.17 Satz

(1) $|a| \geq 0$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.

(2) $|a| = 0$ *genau dann, wenn* $a = 0$.

(3) $a \leq |a| = |-a|$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.

(4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *(Dreiecksungleichung;* $\triangle \leq$*)*

(5) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b|$

(6) $|ab| = |a|\,|b|$

(7) $|a| = |b|$ *genau dann, wenn* $a = b$ *oder* $a = -b$.

Beweis: (4) $\pm a \leq |a|$; $\pm b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$
und $-(a+b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$
(5) $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$; $|b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a|$
$\Rightarrow \pm(|a| - |b|) \leq |a - b|$, woraus die Behauptung folgt. □

Oben hatten wir schon $1, 2, 3, 4, \ldots$ entdeckt. Dies sind wohl die natürlichen Zahlen. Es wirkt vermutlich etwas gekünstelt, wenn wir nun nach einer mathematisch exakten Definition der natürlichen Zahlen suchen. In $\mathbb{R}$ sollten wir aber herausfinden, durch welche Eigenschaft sich die natürlichen von den "anderen" Zahlen unterscheiden.
Mit n ist auch $n + 1$ dazugehörend. Da $1 > 0$, ist $n + 1 > n$, die natürlichen Zahlen werden also größer und größer!

3.18 Definition $\mathbb{R}$ sei ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) heißt *induktiv,* falls gilt
$1 \in A$
$\forall x \in \mathbb{R}: ((x \in A) \Rightarrow ((x+1) \in A))$.
$\mathcal{F}$ sei die Menge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Jede induktive Menge enthält $1, 2, 3, 4, \ldots$ $\mathbb{R}$ und P sind aber induktive Mengen. Wir suchen die kleinste induktive Menge.

3.19 Definition

$$\mathbb{N} := \cap_{A \in \mathcal{F}} A := \{x \in \mathbb{R} | x \in A \,\text{für alle}\, A \in \mathcal{F}\}$$

heißt die *Menge der natürlichen Zahlen* in $\mathbb{R}$.

3.20 Satz

(1) $\mathbb{N}$ *ist induktiv.*

(2) *Ist* $A \subset \mathbb{N}$ *induktiv, dann ist* $A = \mathbb{N}$.

(3) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $1 \leq n$.

(4) *Für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt* $n + m \in \mathbb{N}$ *und* $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

Beweis: (1) 1 gehört zu jeder induktiven Menge, also ist $1 \in \mathbb{N}$. $n \in \mathbb{N}$ sei eine Zahl in $\mathbb{N}$. Dann gehört n zu jeder induktiven Menge $A \subset \mathbb{R}$. Mit A induktiv liegt mit n auch $n+1$ in A. Dies gilt für jede induktive Menge, und daher ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl.
(3) $\{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n\}$ ist induktiv.
(4) $\{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N} \,\text{für alle}\, m \in \mathbb{N}\}$ ist induktiv; hieraus folgt, dass auch $\{n \in \mathbb{N} | n \cdot m \in \mathbb{N} \,\text{für alle}\, m \in \mathbb{N}\}$ induktiv ist.
Die genaue Ausführung der Beweise erfolgt in den Übungen.

3.21 Satz (Induktionsprinzip) *Es sei* $M \subset \mathbb{N}$ *eine Teilmenge und sei* $1 \in M$ *und* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *gelte:* $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$. *Dann ist* $M = \mathbb{N}$.

(Der Beweis ist klar, da $M \subset \mathbb{N}$ induktiv, also $M = \mathbb{N}$.)

Beweis durch vollständige Induktion: Sei $A(n)$ ein logisches Prädikat mit $n \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen die Aussage

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : A(n)$$

Sei nun $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n)\}$. Zeige $M = \mathbb{N}$ in zwei Schritten.

1) *Induktionsanfang:* Man zeige, dass die Aussage $A(1)$ wahr ist, also $1 \in M$.
2) *Induktionsschluss:* Man beweise, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr ist. (Die Impliktaion muss wahr sein, nicht $A(n+1)$.) Das bedeutet dann: Wenn $n \in M$, so folgt $(n+1) \in M$. Dann ist mit Satz 3.21 $M = \mathbb{N}$.

Wir können (2) in Satz 3.20 per Induktion beweisen: Es gilt $1 \geq 1$; Induktionsschluss: Für n sei bewiesen, dass $n \geq 1$. Dann ist $n+1 \geq 1+1 > 1+0 = 1$, also $n+1 \geq 1$. $\square$

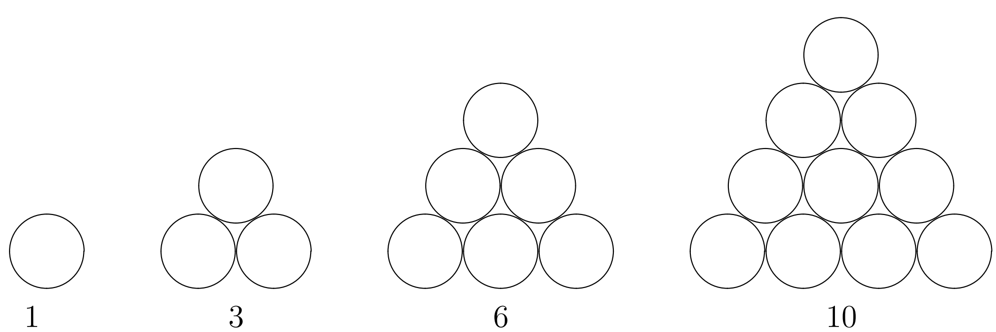
3.22 Definition Sei $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{N}$ heißt *Vorgänger* von n, falls $n = m+1$ gilt.

3.23 Satz *Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen Vorgänger.*

Beweis: Z.z. $\forall n \in \mathbb{N} : n > 1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $n = m+1$. Für $n = 1$ ist die Prämisse falsch, also nichts zu zeigen. Ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so ist $n+1 > n$ und n ist der Vorgänger von $n+1$. $\square$

3.24 Beispiele

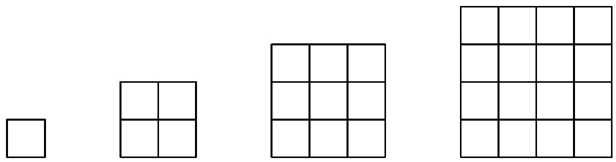
(1)
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};\ n \in \mathbb{N},$$
denn für $n = 1$ stimmt es und der Induktionsschluss ist
$$\begin{aligned} 1 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$



Man nennt daher die Partialsummen auch *Dreiecks-Zahlen*. Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) fand einen schnellen Weg, die Summe der ersten n natürlichen Zahlen beschrieben zu können:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & & \\
n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & & \\
\hline
(n+1) & + & (n+1) & + & \dots & \dots & \dots & + & (n+1) & = & n(n+1)
\end{array}
$$

(2) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2;\ n \in \mathbb{N}$



Der Fall $n = 1$ ist klar.
$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

(3) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Der Fall $n = 1$ ist klar.

$$
\begin{aligned}
1^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{(aus Teil (1))} \\
&= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= (1 + 2 + \cdots + (n+1))^2
\end{aligned}
$$

□

(4) Bernoullische Ungleichung:
Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Der Fall $n = 1$ ist klar.

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \\
&= (1 + nx + x + nx^2) \\
&\geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x
\end{aligned}
$$

□

(5) Ein komplexes Beispiel:
In einer Ebene seien n paarweise verschiedene Geraden gegeben. Diese teilen

die Ebene in verschiedene Gebiete auf und erzeugen so eine Landkarte mit endlich vielen Ländern. Diese Landkarte soll so gefärbt werden, dass zwei Länder, deren Grenzen wenigstens ein Geradenstück gemein haben, mit verschiedenen Farben versehen sind.

Behauptung: Man kommt immer mit 2 Farben aus.

$A(n)$: Eine von n Geraden erzeugte Landkarte kann mit 2 Farben in der gewünschten Weise gefärbt werden.

$n = 1$: Eine Gerade teilt die Ebene in zwei Gebiete, man kommt mit zwei Farben aus.

$n \to n+1$: Wir betrachten nun $n+1$ Geraden $G_1, \dots, G_n, G_{n+1}$. Mit $n \geq 1$ ist $n+1 \geq 2$. Lassen wir zunächst G_{n+1} weg. Nach Induktionsvoraussetzung kann man die verbliebene Karte mit zwei Farben einfärben. Dann fügen wir G_{n+1} hinzu. Wenn wir auf einer der beiden Seiten von G_{n+1} die vorhandenen Farben vertauschen, bekommen wir eine gültige Färbung. In der Vorlesung haben wir dies am Bild diskutiert, es waren 3 Fälle möglich.

In diesem Zusammenhang verweisen wir auf das Vierfarbenproblem, das 1976 von Haken und Appel gelöst wurde: eine gewöhnliche Landkarte soll so eingefärbt werden, dass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben. Man kommt immer mit 4 Farben aus.

(6) $a, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{(geometrische Summenformel)}$$

$n = 1$: nachrechnen
$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} aq^k &= a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + aq^{n+1} \\ &= a\frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

□

$(aq^n)_{n\geq 1}$ nennt man *geometrische Folge.* Sie findet Anwendung z.B. in der *Zinseszinsrechnung:*

Das Kapital K_0 wird zu p Prozent im Jahr verzinst, und Zinsen werden wieder dem Kapital zugeschlagen. Nach n Jahren ist $K_n = K_{n-1} + \frac{p}{100}K_{n-1} = (1 + \frac{p}{100})K_{n-1}$, also $K_n = K_0 q^n$ mit *Aufzinsungsfaktor* $q = (1 + \frac{p}{100})$.

Den Einsatz der geometrischen Summationsformel kann man z. B. bei dem folgenden Modell erleben:

Eine Hypothek K_0 soll mit p Prozent im Jahr verzinst und gleichzeitig getilgt werden. Wir betrachten das Modell der *Annuitätentilgung,* bei der die Annuität A, d.h. die Summe aus Zinsen und Tilgung, konstant bleiben und die Schuld nach n Jahren abgezahlt sein soll. Wir wollen den Tilgungsplan beschreiben. Sei $i = p/100$ und $q = 1 + i$. K_ν sei die Rest-Hypothek nach ν Jahren, Z_ν die Zinszahlung und T_ν die Tilgungsrate am Ende des ν-ten Jahres.
Dann gilt nach Annahme: $Z_\nu + T_\nu = A,\ \nu \in \{1, \ldots, n\}$.
$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = K_0$.
Es ist

$$\begin{aligned} K_\nu = K_{\nu-1} - T_\nu &= K_{\nu-1} - (A - Z_\nu) \\ &= K_{\nu-1} - (A - iK_{\nu-1}) = q\,K_{\nu-1} - A \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_\nu = A - Z_\nu &= A - i\,K_{\nu-1} \\ &= A - i(qK_{\nu-2} - A) \\ &= q\,A - i\,q\,K_{\nu-2} = q(A - Z_{\nu-1}) = q\,T_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Also bilden $T_0, T_1, \ldots$ eine geometrische Folge:

$$T_\nu = T_1\,q^{\nu-1}.$$

Wir wollen die erste Rate T_1 berechnen: $A = T_1 + Z_1 = T_1 + iK_0$; wir kennen aber A noch nicht. Mit $S_n := \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu$ gilt

$$K_0 = \sum_{\nu=1}^{n} T_\nu = T_1 \sum_{\nu=0}^{n-1} q^\nu = T_1\,S_{n-1},$$

also $T_1 = \frac{K_0}{S_{n-1}}$ und $A = \left(i + \frac{1}{S_{n-1}}\right) K_0$. Nun ist $S_{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^n-1}{i}$, also

$$T_1 = \frac{K_0}{S_{n-1}} = \frac{iK_0}{q^n - 1}.$$

Übung: Eine Hypothek von 50 000 Euro soll in 20 Jahren bei einem Zinssatz von 5% im Jahr zurückgezahlt werden. Berechnen Sie die Annuität und die einzelnen Tilgungsraten! Welchen Betrag muss der Schuldner insgesamt bezahlen?

3.3 Kleines Intermezzo: Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

3.25 Definition Zu $x_1, \dots, x_n$ heißt $\bar{x} := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ das *arithmetische Mittel* .

3.26 Beispiel Wir betrachten eine Bevölkerungsentwicklung.

	1988	1989	1990	1991	1992
# Bev.:	100000	150000	195000	214500	257400
Zuwachsrate		50%	30%	10%	20%

Die Zuwachsrate bezieht sich jeweils auf das vorangegangene Jahr als Basisjahr.

Um wieviel % ist die Bevölkerung im Durchschnitt gewachsen? $\bar{x} = 27,5\%$, doch ein Fortschreiben der Bevölkerungszahl von 1988 bei einem Wachstum um $27,5\%$ pro Jahr liefert für 1992 264 264 Bewohner, also 6 864 mehr. Das arithmetische Mittel ist zu groß!

Es ist bei der Verwendung des arithmetischen Mittels nicht beachtet worden, dass die Raten verschiedene Bezugspunkte haben!

1988: 100 000 Einwohner
$\Rightarrow$ 1989: $1,5 \cdot 100\,000$ Einwohner
$\Rightarrow$ 1990: $1,3 \cdot 1,5 \cdot 100\,000$ Einwohner
u.s.w., der Wachstumsprozess wird durch $1,2 \cdot 1,1 \cdot 1,3 \cdot 1,5 = 2,574$ beschrieben. Gesucht ist also eine Zahl g mit $g^4 = 2,574$:

$$g = \sqrt[4]{2,574} \approx 1,26664$$

$\Rightarrow$ durchschnittliches Wachstum $26,664\%$
(„Probe“ : $100\,000 \cdot 1,26664^4 \approx 257402,5$. Abweichung: 3 Personen)

$$g = \sqrt[4]{1,5 \cdot 1,3 \cdot 1,1 \cdot 1,2}$$

3.27 Definition Für $x_i > 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ heißt

$$x_g := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

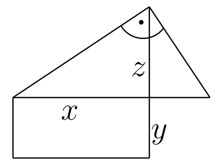
das *geometrische Mittel.*

Begriffsherkunft: Nach dem *Höhensatz des* EUKLID gilt in einem rechwinkligen Dreieck $z = \sqrt{xy}$.

3.28 Definition Für $x_i > 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ heißt

$$x_h := \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

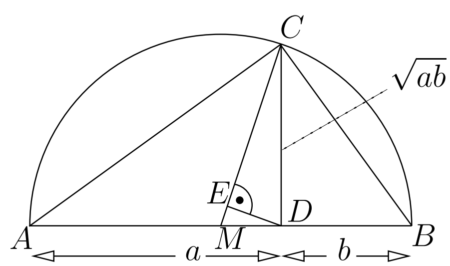
das *harmonische Mittel.*



3.29 Anwendung Ein Zug fährt die ersten 100 km mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h, die zweiten 100 km mit 110 km/h. Dadurch ergibt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$x_h \approx 85,56\,\mathrm{km/h}.$$

3.30 Geometrie am Dreieck Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck.



$$\begin{array}{llcll} \text{Hypothenuse } a+b: & \overline{MC} & = & \text{(a+b)/2} & (\surd) \\ & \overline{CD} & = & \sqrt{ab} & \text{(siehe oben)} \\ & \overline{CE} & = & \dfrac{2ab}{a+b} & ! \end{array}$$

Am Bild ist zu sehen:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}\,.$$

3.31 Arithmetik Für $a > 0,\ b > 0,\ a,b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}\,.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
& (a-b)^2 \geq 0 \\
\Rightarrow\quad & a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\
\Rightarrow\quad & a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\
\Rightarrow\quad & (a+b)^2 \geq 4ab \\
\Rightarrow\quad & \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \\
\text{und}\qquad & (a+b)^2 \geq \frac{4ab \cdot ab}{ab} \\
\Rightarrow\quad & \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.
\end{aligned}$$

$\square$

3.32 Satz *Zu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i > 0$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt*

$$x_h \leq x_g \leq \bar{x}\,.$$

Die rechte Ungleichung heißt auch AGM-Ungleichung.

Beweis: Die rechte Ungleichung impliziert die linke, indem man $(x_1, \ldots, x_n)$ durch $(1/x_1, \ldots, 1/x_n)$ ersetzt.
Sei nun $A(x) := \bar{x}$ und $G(x) := x_g$, so ist $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ und $G(\lambda x) = \lambda G(x)$ für $\lambda \geq 0$. Also kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A(x) = 1$ angenommen werden. (Denn bei $A(x) = c$ betrachte $x_1/c, \ldots, x_n/c$.) Sei also $x_1 + \ldots + x_n = n$. Ist ein $x_i = 0$ oder sind alle x_i gleich, so folgt die AGM-Ungleichung unmittelbar. Sei also jedes x_i positiv und es existiere ein $x_k \neq 1$. Zu zeigen ist: $x_1 \cdots x_n < 1$.

Der Fall $n = 1$ tritt nicht auf.
$n = 2:\ x_1 = 1 + \varepsilon,\ x_2 = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad x_1 x_2 = 1 - \varepsilon^2 < 1.$

Schluss von n auf $n+1$: seien $n+1$ positive Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = n + 1$ vorgegeben. Sei etwa $x_0 < 1$ und $x_1 > 1$, also $x_0 = 1 - \alpha$, $x_1 = 1 + \beta$ mit $\alpha, \beta > 0$.
Für $x_1' := x_0 + x_1 - 1 = 1 - \alpha + \beta$ gilt dann $x_1' + x_2 + \cdots + x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n - 1 = n$, also $x_1' x_2 \cdots x_n < 1$ nach Induktionsvoraussetzung. Nun ist $x_0 x_1 = 1 - \alpha + \beta - \alpha\beta < x_1'$, also $x_0 x_1 x_2 \cdots x_n < x_1' x_2 \cdots x_n < 1$.
$\square$

3.33 Anwendungen $a \neq 1, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq p \leq n$; Wurzelabschätzung:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p \cdot 1 \cdots 1} < \frac{pa + n - p}{n} = 1 + \frac{p}{n}(a-1)$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\sqrt[n]{n} = (\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdots 1)^{1/n} < \frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Dabei haben wir $\sqrt[n]{n} > 1$ für $n \geq 2$ nicht bewiesen!

KAPITEL 4

Relationen, Abbildungen und Mächtigkeit von Mengen

4.1 Relationen

Relationen kennt man aus der Schule vermutlich zahlreich, so etwa die Relationen
$x = y$
$x \leq y$ und $x > y$ sowie
$y = x^2$, aber auch
$a \in A,\ A \subset B$.
Wir formulieren den Begriff Relation auf der Grundlage der Mengenlehre.

4.1 Definition Es seien X, Y zwei Mengen. Eine *Relation* zwischen X und Y ist eine Teilmenge $R \subset X \times Y$. Ist $X = Y$, so spricht man von einer Relation auf X. Man schreibt xRy, falls $(x, y) \in R$.

4.2 Beispiele

(1) $=$ ist eine Relation auf $\mathbb{R}:\ R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x = y\}$

(2) $\leq$ ist eine Relation auf $\mathbb{R}:\ R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \leq y\}$

(3) X sei die Menge der Studienanfänger in Bochum im Wintersemester 06/07.
$aR_1b :\Leftrightarrow a$ lebt im selben Wohnheim wie b.
$aR_2b :\Leftrightarrow a$ und b gingen auf die selbe Schule.

(4) $X = \mathbb{Z}; \quad aRb :\Leftrightarrow a$ ist Teiler von b.

4.3 Bemerkung Ist durch $R \subset X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y gegeben und sind $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ Teilmengen, so definiert $R' := R \cap (X' \times Y')$ eine Relation zwischen X' und Y'. R' heißt *Einschränkung* von R auf $X' \times Y'$.

Mit den folgenden Eigenschaften von Relationen können wir Relationen klassifizieren.

4.4 Definition Sei R eine Relation auf X. Dann heißt R

– *reflexiv,* wenn xRx für alle $x \in X$ gilt.

– *symmetrisch,* wenn für alle $x, y \in X$ aus xRy folgt, dass yRx.

– *transitiv,* wenn $\forall\, x, y, z \in X$ gilt:

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz.$$

Eine Relation R auf X heißt *Äquivalenzrelation,* wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

4.5 Beispiele

(1) Auf einer beliebigen Menge X ist die Relation "=" reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

(2) Auf $\mathbb{R}$ ist "$\leq$" reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

(3) $xRy \Leftrightarrow y = x^2$ hat keine der drei Eigenschaften.

(4) Sei X eine Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Partition von X, d.h. $A_i \subset X$ sind paarweise disjunkte Teilmengen und $X = \cup_{i\in I} A_i$. Wir können auf X eine Relation definieren:
$$xRy :\Leftrightarrow \exists\, i \in I : (x \in A_i \wedge y \in A_i),$$
d.h. xRy genau dann, wenn x, y beide in demselben Element der Partition liegen. Dann ist R eine Äquivalenzrelation (Übung). Hier ist $R = \cup_{i\in I}(A_i \times A_i)$.

4.6 Definition Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge X und sei $x \in X$. Dann heißt
$$A_x := \{a \in X | aRx\}$$
die *Äquivalenzklasse von x modulo R.*

4.7 Beispiel Die Menge aller Studierenden in dem Wohnheim, in dem x lebt, ist ein Beispiel für eine Äquivalenzklasse von x modulo R.

4.8 Satz *Sei R eine Äquivalenzrelation auf X; $x, y \in X$. Dann gilt entweder $A_x = A_y$ oder $A_x \cap A_y = \emptyset$. Die verschiedenen Äquivalenzklassen definieren also eine Zerlegung von X in disjunkte Teilmengen.*

Beweis: Es ist entweder xRy oder $\neg(xRy)$.
1. Fall xRy: $z \in A_x \Leftrightarrow zRx \Rightarrow zRy \Rightarrow z \in A_y$, also $A_x \subset A_y$. Analog zeigt man $A_y \subset A_x$, also $A_x = A_y$.
Im zweiten Fall $\neg(xRy)$ führen wir einen Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, es existiert also ein $z \in A_x \cap A_y$, also mit Transitivität $zRx \wedge zRy \Rightarrow xRy$, ein Widerspruch. $\square$

Man bezeichnet mit X/R (X modulo R) die Menge der Äquivalenzklassen modulo R.

4.9 Beispiel Sei $p \in \mathbb{Z}$; $p \geq 1$, wobei
$$\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} | (x = 0) \vee (x \in \mathbb{N}) \vee (-x \in \mathbb{N})\}.$$

Wir definieren die Relation “x ist kongruent y modulo p”, in Zeichen $\equiv (\text{mod } p)$:

$$x \equiv y\,(\text{mod}\,p) :\Leftrightarrow p\,\text{ist Teiler von}\,y - x.$$

Es ist somit $x \equiv y(\text{mod}\,p)$ (per Definition) genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $y - x = kp$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Es gibt genau p Äquivalenzklassen (“Restklassen modulo p”)

$$\begin{array}{ll} [0] & = \{\ldots - p, 0, p, 2p, \ldots\} \\ [1] & = \{\ldots - p + 1, 0, p + 1, 2p + 1, \ldots\} \\ \vdots & \\ [p-1] & = \{\ldots - p - 1, -1, p - 1, 2p - 1, \ldots\} \end{array}$$

$\mathbb{Z}/_{\equiv(\text{mod}\,p)} =: \mathbb{Z}_p$. Hier kann man $+$ und $\cdot$ erklären.

4.2 Abbildungen

Der Abbildungsbegriff ist zentral in der Mathematik und ist im Schulunterricht schon an zentraler Stelle aufgetreten.

4.10 Definition Seien X, Y Mengen. Eine *Abbildung* ist eine Relation $f \subset X \times Y$ mit den folgenden Eigenschaften:

(A1) Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$.

(A2) Gilt $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$, so ist $y = z$.

(A1) und (A2) kann man auch so zusammenfassen:

(A) Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$.

Das Element $y \in Y$, das einem $x \in X$ eindeutig zugeordnet wird, wird mit $f(x)$ bezeichnet. Wir sagen auch, dass eine Abbildung eine Zuordnungsvorschrift ist, die einem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

X heißt *Definitionsbereich*, Y *Bildbereich* der Abbildung f. Anstelle von $f \subset X \times Y$ schreiben wir $f : X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ und $x \mapsto f(x)$.

4.11 Definition Jeder Abbildung f ist eine Menge

$$G_f := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

zugeordnet, der *Graph* von f. Der Graph ist gerade die Teilmenge $f \subset X \times Y$, die gemäß der Definition eine Abbildung als Relation beschreibt.

Zur Anschauung via Venn-Diagramme siehe Abbildung 4.1.

Eine *Funktion* ist eine Abbildung mit Wertebereich $\mathbb{R}$.

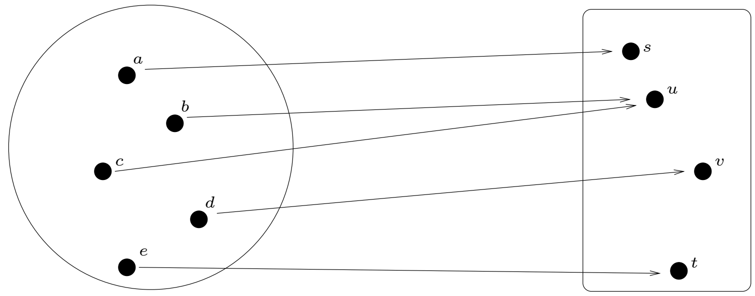


Abb. 4.1: Venn-Diagramm

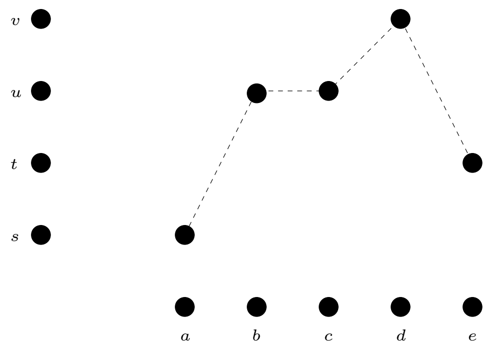


Abb. 4.2: Polygonzug

4.12 Definition Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(1) Für $A \subset X$ heißt

$$f(A) := \{y \in Y : \exists\, x \in A \,\mathrm{mit}\, y = f(y)\}$$

das *Bild von A unter f*. $f(X) \subset Y$ heißt Bild von f, symbolisch $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Bild}(f)$.

(2) Für $B \subset Y$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

das *Urbild von B unter f*.

4.13 Beispiele

(1) $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0;\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad f(x) := ax + b$, affin-lineare Funktion

(2) $f(x) := x^2;\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$; für $y \in [0, \infty)$ ist $f^{-1}(\{y\}) = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$, für $y \in (-\infty, 0)$ ist $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$.

(3) $f(x) := |x|$, *Betragsfunktion*

(4) $f(x) := [x] :=$ größtes Element der Menge $\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$, *Gaußklammer-Funktion*

(5) Seien X, Y Mengen; $\pi_1 : X \times Y \to X; (x,y) \mapsto x; \quad \pi_2 : X \times Y \to Y; (x,y) \mapsto y$ werden *Projektionen* genannt. Es ist $\pi_1^{-1}(A) = A \times Y, A \subset X$.

(6) $id_X : X \to X; x \mapsto x$ heißt *Identitätsabbildung.*

4.14 Satz *Eine Abbildung $f : X \to Y$ sei gegeben. Dann gilt für $A, B \subset Y$:*

(1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(3) $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$

(4) *Für $A, B \subset X$ gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.*

Beweis: (1)-(3) ist eine Übung. Zum Beweis von (4):

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists\, x \in A \cup B : y = f(x) \\ &\Leftrightarrow (\exists\, x \in A : y = f(x)) \vee (\exists\, x \in B : y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

$\square$

4.15 Bemerkung Die zu (2) und (3) analogen Aussagen für das Bild von Durchschnitt bzw. Differenz zweier Mengen sind falsch. Beispiele werden in den Übungen betrachtet.

4.16 Definition Eine Abbildung $f : X \mapsto Y$ heißt *surjektiv,* falls gilt

$$\forall\, y \in Y\, \exists\, x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

f ist also genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Im}(f) = Y$.

4.17 Beispiele

(1) Ist $a \neq 0$, so ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b,$ surjektiv, denn $y = ax + b$ hat eine Lösung: $x = \frac{1}{a}(y - b)$.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv, denn negative Zahlen können als Bild nicht vorkommen. Die gleiche Abbildung mit dem Wertebereich $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ ist surjektiv.

(3) $\mathcal{P}$ sei die Menge der Primzahlen. $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathcal{P}$ sei definiert durch $f(n) =$ kleinster Primteiler von n. Da $f(p) = p$ für $p \in \mathcal{P}$, ist f surjektiv.

4.18 Definition Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv,* falls gilt:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \text{ gilt: Ist } x_1 \neq x_2, \text{ so ist auch } f(x_1) \neq f(x_2).$$

D. h. f ist injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Den Nachweis der Injektivität führt man meist durch Kontraposition: Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $x_1 = x_2$.

4.19 Beispiele Wir betrachten noch einmal die Beispiele 4.17.

(1) Ist $a \neq 0$, so ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, injektiv, denn $ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow a(x_1 - x_2) = 0$. Da $a \neq 0$ folgt $x_1 = x_2$.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, denn für $x \neq 0$ ist $-x \neq x$, aber $f(-x) = f(x)$.

(3) $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathcal{P}$, $\quad f(n) =$ kleinster Primteiler von n, ist nicht injektiv, denn $f(6) = f(8) = 2$ oder $f(15) = f(39) = 3$.

4.20 Definition Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$. Man definiert die *Einschränkung* von f auf A (in Zeichen $f|_A$) als diejegnige Abbildung $f|_A : A \to Y$, die durch $(f|_A)(x) := f(x)$ gegeben wird.
Folgerung: Ist $f : X \to Y$ injektiv und $A \subset X$, so ist $f|_A$ injektiv. Ist $f|_A$ surjektiv, so auch f.

4.21 Definition Eine Abbildung $f : X \to Y$, die injektiv und surjektiv ist, heißt *bijektiv.*

($f(x) := ax + b$, $a \neq 0$ ist bijektiv, ebenso
$f : \mathbb{R}_+ := \{x \in R | x > 0\} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$.)

4.22 Definition X, Y, Z seien Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann definieren wir ihre *Verknüpfung* $g \circ f : X \to Z$ durch $g \circ f(x) = g(f(x))$.

4.23 Beispiel $f(x) = x^2; \quad g(x) = \sin x;$
$g \circ f(x) = \sin(x^2); \quad f \circ g(x) = (\sin x)^2.$

4.24 Definition Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *invertierbar,* wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ mit den Eigenschaften $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ gibt. g heißt *Umkehrabbildung* oder *Inverse* oder *inverse Abbildung zu f* und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Achtung: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $y \in Y$, so kennen wir $f^{-1}(\{y\})$, die Urbildmenge. Ist f bijektiv, so existiert die Umkehrabbildung f^{-1}. $f^{-1}(y)$ ist dann ein Element von X. Aber dann $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

4.25 Satz *Zu einer Abbildung $f : X \to Y$ gibt es höchstens eine Inverse.*

Beweis: $g_1, g_2 : Y \to X$ seien zwei Inverse zu f. Dann ist $g_1(y) = g_1(f(g_2(y))) = g_1 \circ f(g_2(y)) = g_2(y)$. □

4.26 Satz *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann invertierbar, wenn f bijektiv ist.*

Beweis: "$\Rightarrow$" Es sei $f : X \to Y$ invertierbar. Also existiert $g : Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. Sei nun $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, also $x_1 = x_2$, also ist f injektiv. Sei nun $y \in Y$ und betrachte $g(y) =: x$; dann ist $f(x) = f(g(y)) = y$, also ist f auch surjektiv.
"$\Leftarrow$" Sei nun f bijektiv. Zu $y \in Y$ gibt es wegen der Surjektivität ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Dieses x ist wegen der Injektivität eindeutig festgelegt; wir setzen $g(y) := x$. Dann ist $f(g(y)) = f(x) = y$ und $g(f(x)) = x$, da x das einzige Element von X ist, das die oben gestellte Bedingung erfüllt. □

4.3 Mächtigkeit

Mit Hilfe der Bijektionen können wir nun klären, was Mächtigkeit einer Menge bedeuet.

4.27 Definition Zwei Mengen M und N heißen *gleich mächtig,* falls es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt. Man sagt auch, sie haben gleiche *Mächtigkeit* oder *Kardinalzahl.*

4.28 Definition Eine Menge M heißt *endlich,* wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so dass M die gleiche Mächtigkeit wie $\{1, \ldots, n\}$ hat. Eine Menge M heißt *abzählbar,* wenn sie entweder endlich ist oder die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ hat. Ist M nicht abzählbar, so heißt M *überabzählbar.*

4.29 Definition Sei X eine Menge. Eine *Folge* ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$. Wir schreiben $x_n = f(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(x_n)_{n \geq 1}$.

Damit ist eine Menge X abzählbar unendlich, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft gibt, dass jedes Element aus X in $\{x_1, x_2, \ldots\}$ vorkommt.

4.30 Beispiele

(1) $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(2) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich, denn $f(n) = (-1)^n[\frac{n}{2}]$.

(3) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich;

$$\mathbb{Q} = \{p/q;\ p, q \in \mathbb{Z};\ q \neq 0\}.$$

$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ erklären wir am Bild. Das *Cantorsche Diagonalverfahren* ist eine Abzählung der positiven rationalen Zahlen.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \to & 2 & & 3 & \to & 4 & & 5 & \to & 6 \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & & & & & & & & &
\end{array}$$

4.31 Satz $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ *und damit erst recht ganz* $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis: Könnte man die reellen Zahlen abzählen, so hätte man eine Folge $f(1), f(2), f(3), \ldots$, in der jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 vorkommt. Nun machen wir noch Gebrauch von der "Tatsache", dass jedes $x \in [0, 1]$ sich als unendlicher Dezimalbruch darstellen lässt; also

$$\begin{array}{ccl}
f(1) & = & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\
f(2) & = & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\
\vdots & & \\
f(n) & = & 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \\
\vdots & &
\end{array}$$

Die a_{ij} nehmen dabei Werte aus $\{0, \ldots, 9\}$ an. Man betrachte nun die Zahl $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ mit

$$a_n := \begin{cases} 5\,, & \text{falls } a_{nn} \neq 5 \\ 4\,, & \text{falls } a_{nn} = 5. \end{cases}$$

Dann liegt x zwischen 0 und 1 und muss unter den Folgegliedern vorkommen: $\exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $x = f(m)$. Dann ist $a_m = a_{mm}$, im Widerspruch zur Definition der a_i. $\square$

Index