Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und Geometrie I“

Ruhr-Universität Bochum
Prof. Dr. Peter Eichelsbacher
Wintersemester 2006/2007

(Beispiel-Klausur)

Aufgabe 1:

Was ist ein *Erzeugendensystem* eines K-Vektorraums V, was ein *linear unabhängiges* System von Vektoren in V und was ist eine *Basis* von V? Wie lautet die *Dimensionsformel* für eine lineare Abbildung $f : V \to W$? Antworten Sie jeweils kurz aber genau.

Aufgabe 2:

Es seien V, W und X K-Vektorräume und $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ und $\mathcal{X}$ Basen in diesen Vektorräumen. Ferner seien $f : V \to W$ und $g : W \to X$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie die folgende Identität für die darstellenden Matrizen:

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f.$$

Hierbei werden die darstellenden Matrizen jeweils bezüglich der entsprechenden Basen genommen.

Aufgabe 3:

Es sei $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ein System von Vektoren im $\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie die Transformationsmatrix S des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$, sowie die Transformationsmatrix T des Basiswechsels von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{A}$.

Aufgabe 4:

Es sei K ein Körper und sei $A \in M(n, K)$. Sei weiter

$$C_A := \{B \in M(n, K) : AB = BA\}.$$

Man zeige:

(a) C_A ist ein Unterraum von $M(n,K)$.

(b) Für alle $B \in M(n,K)$ gilt: Liegt B in C_A, so auch $A\,B$.

(c) Die Abbildung $C_A \to C_A$, $B \mapsto A\,B$ ist linear.

(d) Für $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$ gilt $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A \in GL(3,\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 2 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

(b) Seien V, W zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W) = 3$. Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis von V und w_1, w_2, w_3 eine Basis von W. Die lineare Abbildung $f : V \to W$ sei gegeben durch

$$f(v_1) = i\,w_1 + 2w_2 + w_3,\ \ f(v_2) = i\,w_2,\ \ f(v_3) = 2w_1 + w_2 + i\,w_3.$$

Zeigen Sie: f ist ein Isomorphismus.

(c) Sei $g : W \to V$ die Umkehrabbildung zu f. Geben Sie $g(w_j)$, $j = 1, 2, 3$, an.

Aufgabe 6:

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

(a) eine Basis von $\ker(f)$ und

(b) eine Basis von $\operatorname{im}(f)$.

(c) Begründen Sie, dass es Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass die darstellende Matrix bezüglich dieser Basen die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Aufgabe 7:

Es seien
$$U := \{(\alpha, \beta, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$
und
$$W := \{(\gamma, \delta, 2\gamma), \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Man zeige, dass U und W Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Man bestimme eine Basis von U und eine Basis von $U \cap W$.

Aufgabe 8:

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}.$$
Man zeige, dass
$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$
eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und berechne die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{A}$ und bezüglich $\mathcal{E}$ (kanonische Basis).

Aufgabe 9:

Es sei K ein Körper, und $V = \mathbb{R}_3[x]$ der Vektorraum aller Polynome p vom Grad kleiner gleich 3. Wir definieren eine lineare Abbildung
$$f : V \to V, \quad p(x) \mapsto p(x+1).$$
Wählen Sie eine Basis $p_1, \ldots, p_4 \in V$ und bestimmen Sie die darstellende Matrix A_f von f bezüglich dieser Basis. Berechnen Sie dann die Funktion
$$\chi_{A_f}(t) := \det\big(t\, E_4 - A_f\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 10:

Es seien $x, y \in K$ zwei Elemente eines Körpers, und $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Wir definieren eine $2n \times 2n$ Matrix $A_n = (\alpha_{ij}) \in M(2n, K)$ durch
$$\alpha_{ij} = \begin{cases} x & : \quad i = j \\ y & : \quad i = 1 + 2n - j \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$
In Worten: x steht auf der Diagonalen, und y auf der Antidiagonalen. Zeigen Sie durch Induktion unter Verwendung der Laplace-Entwicklung, dass
$$\det(A_n) = (x^2 - y^2)^n$$
gilt.