Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

8. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 21. Dezember 2006, 14 Uhr

1. Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K ein Körper, $\mathrm{char(K)} \neq 2$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathrm{Sym(n,K)} := \{A \in M(n,K) \mid A^T = A\},\ \mathrm{Asym}(n,K) := \{A \in M(n,K) \mid A^T = -A\}$$

die Menge der symmetrischen beziehungsweise schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Zeigen Sie, dass diese jeweils Unterräume von $M(n,K)$ sind und bestimmen sie ihre Dimension. Folgern Sie aus der Dimensionsformel für Unterräume (Satz 7.19), dass $M(n,K) = \mathrm{Sym}(n,K) + \mathrm{Asym}(n,K)$ gilt.

2. Aufgabe (7 Punkte):
Es seien $(K,+,\cdot)$ und $(L,+,\cdot)$ zwei Körper. Gilt $K \subset L$ und stimmen Addition und Multiplikation in L auf K mit denen von K überein, so heißt L eine Körpererweiterung von K.

(a) Zeigen Sie, dass L auf natürliche Weise ein K-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie: Die Dimension der reellen Zahlen, aufgefasst als Vektorraum über $\mathbb{Q}$, ist nicht endlich.

Hinweis: Zeigen Sie in (b), dass die Folge $(\log(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist, wobei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Primzahlen ist.

3. Aufgabe (7 Punkte):
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3), und sei (w_1, w_2, w_3) gegeben durch $w_1 = 2v_1 - v_2 - v_3$, $w_2 = -v_2$ und $w_3 = 2v_2 + v_3$.

(a) Zeigen Sie, dass (w_1, w_2, w_3) eine Basis von V ist, und geben Sie die Matrix an, die den Koordinaten bezüglich (v_1, v_2, v_3) eines beliebigen Vektors in V die Koordinaten bezüglich (w_1, w_2, w_3) zuordnet.

(b) Bestimmen Sie alle Vektoren in V, welche die gleichen Koordinaten bezüglich beider Basen haben.

4. Aufgabe (Präsenz):
Es seien $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,1,1)$, $v_3 = (1,1,2,1)$, $v_4 = (1,3,2,3)$ sowie $w_1 = (1,0,3,3)$, $w_2 = (-2,-3,-5,-4)$, $w_3 = (2,2,5,4)$, $w_4 = (-2,-3,-4,-4)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ Basen des $\mathbb{R}^4$ sind und berechnen Sie die Basis-Transformation von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{W}$.

5. Aufgabe (Präsenz):
Es sei V ein reeller Vektorraum und $a, b, c, d, e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$v_1 = a + b + c,\ v_2 = 2a + 2b + 2c - d,\ v_3 = a - b - e,$$

$$v_4 = 5a + 6b - c + d + e,\ v_5 = a - c + 3e,\ v_6 = a + b + d + e.$$

Bitte wenden

6. Aufgabe (Präsenz):
Im $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden Basen gegeben: $\mathcal{V} = ((1,-1,2),(2,3,7),(2,3,6))$ und $\mathcal{W} = ((1,2,2),(-1,3,3),(-2,7,6))$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix, die den Koordinaten bezüglich $\mathcal{V}$ eines beliebigen Vektors in $\mathbb{R}^3$ die Koordinaten bezüglich $\mathcal{W}$ zuordnet.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \cdot (1,-1,2) + 9 \cdot (2,3,7) - 8 \cdot (2,3,6)$$

bezüglich der Basis $\mathcal{W}$.