Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

7. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 14. Dezember 2006, 14 Uhr

1. Aufgabe (5 Punkte):
Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Tauschen Sie nacheinander jeweils einen der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 gegen w aus, und prüfen Sie in jedem der vier Fälle, ob die Basiseigenschaft erhalten bleibt.

2. Aufgabe (10 Punkte):
Es sei $\mathbb{R}_{n-1}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome in der Variablen x vom Grad kleiner $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Monome $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ eine Basis von $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ bilden.

(b) Es seien $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die sogenannten Interpolationspolynome $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ mit

$$g_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - c_j}{c_i - c_j}$$

eine Basis von $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ bilden, und bestimmen Sie die Koeffizienten eines beliebigen Polynoms aus $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ bezüglich dieser Basis.

3. Aufgabe (5 Punkte):
Es sei K ein Körper. Betrachten Sie folgende Unterräume von K^n:

$$U := \left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0\right\}$$

$$D := \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U, D, $U \cap D$ und $U + D$.

Bitte wenden

4. Aufgabe (Präsenz):
Welche der folgenden Tripel bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Aufgabe (Präsenz):
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3), und sei (w_1, w_2, w_3) gegeben durch $w_1 = 2v_1 - v_2 - v_3$, $w_2 = -v_2$ und $w_3 = 2v_2 + v_3$. Zeigen Sie, dass (w_1, w_2, w_3) eine Basis von V ist.

6. Aufgabe (Präsenz):
Betrachten Sie die Unterräume $U = L[(1,3,0,1),(1,0,0,-1),(-1,3,0,3)]$ und $W = L[(0,3,2,2),(0,0,2,0)]$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U, W, $U \cap W$ und $U + W$.

7. Aufgabe (Präsenz):
Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{n+x}$, für $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängig sind.