Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

6. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 7. Dezember 2006, 14 Uhr

1. Aufgabe (10 Punkte):
Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

regulär ist, und berechnen Sie für diese λ die inverse Matrix A_λ^{-1}.

2. Aufgabe (10 Punkte):
Bestimmen Sie die Menge $K = \{\, A \in M(n,\mathbb{R}) \mid AB = BA \text{ für alle } B \in M(n,\mathbb{R}) \,\}$.

Hinweis: Betrachten Sie zu gegebenem $A \in K$ die Produkte AB und BA für spezielle Matrizen B, die außer einer Eins nur Nullen enthalten. Beachten Sie die Vorbereitung durch Aufgabe 6.

3. Aufgabe (Präsenz):
Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\,\} \subset \mathbb{R}^2$
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\,\} \subset \mathbb{R}^3$
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in \mathbb{Q}\,\} \subset \mathbb{R}^2$
(d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\,\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

4. Aufgabe (Präsenz):
Sind die folgenden Matrizen mit Komponenten im Körper $\mathbb{R}$ invertierbar? Wenn ja, dann geben Sie die inverse Matrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix C in $\mathbb{Z}_3$ invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls auch hier die inverse Matrix.

5. Aufgabe (Präsenz):
Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das cartesische Produkt $V \times W$ durch die Verknüpfungen

$$(v,w) + (v',w') := (v+v', w+w'), \quad \lambda \cdot (v,w) := (\lambda v, \lambda w)$$

ebenfalls zu einem K-Vektorraum wird.

Bitte wenden

6. Aufgabe (Präsenz):
Es bezeichne E_{kl} die $n \times n$-Matrix, deren k-te Zeile e^l ist und deren anderen Zeilen der Nullvektor sind. Formal ist E_{kl} wie folgt definiert:

$$E_{kl} := (\varepsilon_{ij}^{(k,l)}) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij}^{(k,l)} := \delta_{ik}\, \delta_{jl}.$$

Berechnen Sie das Produkt $E_{kl}\, E_{rs}$.