Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

5. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 30. November 2006, 14 Uhr

1. Aufgabe (10 Punkte):

(a) Berechnen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

die Produkte AB, BA, BC und CB, oder begründen Sie, warum diese nicht existieren.

(b) Berechnen Sie die Potenzen der folgenden $n \times n$-Matrix A (das heißt die Matrizen A, $A^2 := A \cdot A$, $A^3 := A \cdot A \cdot A$, ...):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie für die Matrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine Matrix Q_α an, für die $Q_\alpha R_\alpha = E_2$ gilt, und berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme alle ganzzahligen Potenzen von R_α.

2. Aufgabe (5 Punkte):

(a) Es seien A, B und C invertierbare Matrizen. Sind die Matrizen $AB^{-1}C$, A^2 und $A+B$ invertierbar? Berechnen Sie jeweils entweder die Inverse, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(b) Zeigen Sie $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$ für invertierbare Matrizen A und B.

3. Aufgabe (5 Punkte):

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ eine Matrix, deren Komponenten $a_{ij} = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \geq j$ erfüllen. Beweisen Sie, dass A invertierbar ist und die Inverse durch

$$A^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j B^j$$

mit $B = A - E_n$ gegeben ist. Dabei ist $B^0 = E_n$ per Konvention.

Hinweis: Verwenden Sie Teil (b) der 4. Aufgabe.

Bitte wenden

4. Aufgabe (Präsenz):

(a) Es seien $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ und $B = (b_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ zwei untere Dreiecksmatrizen, das heißt, es gelten $a_{ij} = 0$ und $b_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i < j$. Zeigen Sie, dass AB eine untere Dreiecksmatrix ist. Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Zeigen Sie: Für jede untere Dreiecksmatrix $C = (c_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ mit $c_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $C^n = 0$. Betrachten Sie auch hier zunächst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

5. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie alle Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}_2$.

6. Aufgabe (Präsenz):
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -2x + 3y + 2z + 4w &= 0, \\ x - y + 2z + 3w &= 0, \\ 2x + y + 2z - 2w &= 0. \end{aligned}$$

7. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ lösbar ist:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1, \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= a, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= b. \end{aligned}$$