Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

4. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 23. November 2006, 14 Uhr

1. Aufgabe (5 Punkte):

(a) Beschreiben Sie alle zweistelligen Verknüpfungen $*$ auf der Menge $M = \{e, a, b\}$, so dass $(M, *)$ eine Gruppe mit Neutralelement e ist. Welche dieser Gruppen sind abelsch? Begründen Sie.

(b) Auf der Menge $\mathbb{Z}_2^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sei die Addition $+$ definiert durch

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2^2$. Dabei wurde auf der rechten Seite der Gleichung die Addition des Körpers $\mathbb{Z}_2$ verwendet. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2^2, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(c) Definieren Sie auf $\mathbb{Z}_2^2$ eine Multiplikation $\cdot$ mit Neutralelement $(1, 0)$, so dass $\mathbb{Z}_2^2$ mit der Addition und der Multiplikation ein Körper ist. Welche Charakteristik hat $(\mathbb{Z}_2^2, +, \cdot)$?

2. Aufgabe (5 Punkte):

Ein kommutativer nullteilerfreier Ring mit Neutralelement heißt *Integritätsbereich*. Sei R ein Integritätsbereich.

(a) Zeigen Sie, dass in der Menge $R \times (R \setminus \{0\})$ durch

$$(g, h) \sim (g', h') :\Leftrightarrow g\,h' = g'\,h$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist. Sei K die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu (g, h) gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\frac{g}{h}$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass in K die Verknüpfungen

$$\frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} := \frac{g\,h' + h\,g'}{h\,h'}, \quad \frac{g}{h} \cdot \frac{g'}{h'} := \frac{g\,g'}{h\,h'}$$

wohldefiniert sind.

(c) Zeigen Sie schließlich, dass K mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper wird.

3. Aufgabe (5 Punkte):

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} 2x + y \phantom{{}+2z} &= 1, \\ 3x - y + 2z &= 1, \\ x - 2y + 2z &= b. \end{aligned}$$

Bitte wenden

4. Aufgabe (5 Punkte):
Es sei das folgende lineare Gleichungssystem (G) für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben:

$$\begin{aligned} ax + a^2 y &= a + b, \\ a^2 x + \; ay &= \quad 2b. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr (mit Begründung)?

(a) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so dass (G) mindestens eine Lösung hat.

(b) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so dass (G) genau eine Lösung hat.

(c) Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ hat (G) genau eine Lösung.

(d) Es gibt ein $b \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung von (G) existiert.

5. Aufgabe (Präsenz):
Auf $\mathbb{R}$ sei die folgende Relation $\sim$ definiert: $a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Überlegen Sie, ob die folgenden zweistelligen Verknüpfungen auf $\mathbb{R}/\sim$ wohldefiniert sind: $[a] + [b] := [a + b]$, $[a] \cdot [b] := [ab]$.

6. Aufgabe (Präsenz):
Bringen Sie die folgenden Matrizen auf Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie Untergruppen von $S(3)$. Haben Sie alle gefunden?

8. Aufgabe (Präsenz):
Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ die Menge der reellen Zahlen $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Überlegen Sie sich: Die Addition und Multiplikation reeller Zahlen definieren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, und $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ ist ein Körper.