Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

3. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 16. November 2006, 14 Uhr

1. Aufgabe (10 Punkte):
Sei X eine nicht leere Menge und $\mathcal{P}(X)$ die zugehörige Potenzmenge.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ mit der Vereinigung als Operation $+$ und dem Durchschnitt als Operation $\circ$ kein Ring ist.

(b) Zeigen Sie: Wird die Operation $+$ von $A, B \in \mathcal{P}(X)$ durch die symmetrische Differenz $A \triangle B$ definiert und als Operation $\circ$ der Durchschnitt gewählt, so ist $(\mathcal{P}(X), +, \circ)$ ein kommutativer Ring mit Eins (der sogenannte Mengenring).

2. Aufgabe (10 Punkte):
Eine nichtleere Teilmenge H einer Gruppe G heißt *Untergruppe*, wenn für alle $a, b \in H$ gilt: $a \circ b \in H$ und $a^{-1} \in H$. Es seien $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie, dass

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow x\, y^{-1} \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G ist.

(b) Sei $G/H := G/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, und die zu $x \in G$ gehörige Äquivalenzklasse sei mit $[x]$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$x, x', y, y' \in G \,\text{mit}\, x \sim x', y \sim y' \Longrightarrow xy \sim x'y'.$$

(c) Zeigen Sie, dass die repräsentantenweise definierte Verknüpfung auf $G/H \times G/H$:

$$[x] \circ [y] := [xy]$$

wohldefiniert ist.

Hinweis: benutzen Sie Teilaufgabe (b).

(d) Zeigen Sie, dass $(G/H, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

3. Aufgabe (Präsenz):
Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Es sei $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ ist.

(a) Erläutern Sie, warum $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert.

Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$, die $x \in \mathbb{R}$ enthält. Dann ist $\lfloor x \rfloor \in [x]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, mittels $[x] + [y] := [x + y]$ eine Verknüpfung auf den Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ zu definieren.

(c) Zeigen Sie, dass $[x] + [y] := [\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor]$ eine Verknüpfung auf den Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ definiert.

Hinweis: Für Teil (a) können Sie Aufgabe 3 (b), Blatt 2, verwenden.

Bitte wenden

4. Aufgabe (Präsenz):
Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen G mit der Verknüpfung $*$ Gruppen sind:

(a) $G = \mathbb{R}$, $x * y = (x^3 + y^3)^{1/3}$. (Negative Zahlen haben eine wohlbestimmte dritte Wurzel.)

(b) $G = \mathbb{R}$, $x * y = 3x + 4y$.

(c) $G = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

5. Aufgabe (Präsenz):
Die Drehgruppe $(T, \circ)$ eines regulären Tetraeders umfaßt alle einfachen Drehungen, die den Tetraeder in sich überführen. Dabei bezeichnet $\circ$ die Hintereinanderausführung zweier Drehungen.

(a) Listen Sie die Elemente der Gruppe $(T, \circ)$ auf. (*Hinweis:* $(T, \circ)$ hat 12 Elemente.)

(b) Prüfen Sie, ob $(T, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

6. Aufgabe (Präsenz):
Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit Neutralelement e, so dass $a * a = e$ für alle $a \in G$ gilt. Zeigen Sie (in einer Zeile), dass G abelsch ist.