Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

12. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 1. Februar 2007, 14 Uhr

1. Aufgabe (6 Punkte):
Der Absolut-Betrag für komplexe Zahlen wird definiert durch

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+, \quad z \mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}}.$$

Beweisen Sie, dass für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(a) $|zw| = |z|\,|w|$,

(b) $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$ für $z \in \mathbb{R}$,

(c) $|\mathrm{Re(z)}| \leq |\mathrm{z}|$, $|\mathrm{Im(z)}| \leq |\mathrm{z}|$, $|z| = |\bar{z}|$,

(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung),

(e) $z^{-1} = 1/z = \bar{z}/|z|^2$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

(f) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

2. Aufgabe (7 Punkte):
Es sei $\mathbb{R}_k[x]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq k$. Die *Hermite-Polynome* H_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind definiert als

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass H_n ein Polynom vom Grad n ist, und dass $H_0(x), \ldots, H_k(x)$ eine Basis von $\mathbb{R}_k[x]$ bilden.

(b) Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n\, H_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \exp(-x^2) = -2x \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) - 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \exp(-x^2)$$

gilt.

(c) Es sei $D : \mathbb{R}_k[x] \to \mathbb{R}_k[x]$ die Ableitungs-Abbildung von Blatt 11, Aufgabe 2. Geben Sie die darstellende Matrix von D in der Basis der Hermite-Polynome an.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe (b).

Bitte wenden

3. Aufgabe (7 Punkte):
Es sei $n \geq 2$ und $A \in M(n, K)$ von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_1 und A_2 quadratisch sind. Zeigen Sie:

$$\det A = (\det A_1)\,(\det A_2).$$

Hinweis: Bringen Sie A geeignet auf obere Dreiecksform und verwenden Sie, dass die Determinate einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonalelemente der Matrix ist.

4. Aufgabe (Präsenz):
Zeigen Sie, dass im Körper der komplexen Zahlen für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(a) $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$,

(b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$,

(c) $\bar{\bar{z}} = z$,

(d) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$,

(e) $z\,\bar{z} = x^2 + y^2$ mit $x := \mathrm{Re}(z)$ und $y := \mathrm{Im}(z)$.

5. Aufgabe (Präsenz):
Lösen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens das folgende lineare Gleichungssystem mit komplexen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad + ix_3 &= i, \\ x_1 - 3x_2 - ix_3 &= 2i, \\ ix_1 + x_2 + x_3 &= 1 + i. \end{aligned}$$

6. Aufgabe (Präsenz):
Berechnen Sie $\det(A)$ sowie $\det(B)$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

"Experience is the name everybody gives to his mistakes." (Oskar Wilde)