Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

11. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 25. Januar 2007, 14 Uhr

1. Aufgabe (6 Punkte):
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2). Seien $f, g, h \in \hom(V)$ gegeben durch $f(v_1) = v_1 - v_2$, $f(v_2) = v_1$, $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = v_1$ sowie $h(v_1) = 2v_1$ und $h(v_2) = -2v_2$.

(a) Geben Sie die darstellenden Matrizen von f, g und h bezüglich der Basis (v_1, v_2) an.

(b) Seien $w_1 = 3v_1 - v_2$ und $w_2 = v_1 + v_2$. Zeigen Sie, dass (w_1, w_2) eine Basis von V ist, und geben Sie die darstellenden Matrizen von f, g und h bezüglich der neuen Basis (w_1, w_2) an.

2. Aufgabe (7 Punkte):
Wie in Aufgabe 2, Blatt 7, bezeichne $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ den Vektorraum der Polynome in der Variablen x vom Grad kleiner $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Die Abbildung $D\colon \mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ sei definiert durch

$$D\Big(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\Big) = \sum_{j=1}^{n-1} j\, a_j x^{j-1}$$

für alle $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung D linear ist, und bestimmen Sie die darstellende Matrix von D bezüglich der Monome als Basis im Definitions- und im Bildbereich.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{im} D$ und $\ker D$.

3. Aufgabe (7 Punkte):
Es sei K ein Körper. Für jede Matrix $A \in M(n, K)$ mit $A = (a_{ij})_{ij}$ ist $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die *Spur* (englisch: trace) von A. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\operatorname{Tr} : M(n, K) \to K$ ist K-linear.

(b) Im Allgemeinen ist $\operatorname{Tr}(AB) \neq \operatorname{Tr} A \operatorname{Tr} B$.

(c) Es gilt $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

(d) Ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur (verwenden Sie Teil (c)).

(e) Für jedes $n \geq 2$ gibt es Matrizen in $M(n, K)$, die die gleiche Spur haben, ohne ähnlich zu sein.

4. Aufgabe (Präsenz):
Für $f, g \in \hom(V, W)$ definieren wir $f \sim g$, wenn Isomorphismen $\psi : V \to V$ und $\sigma : W \to W$ existieren mit $\sigma \circ f = g \circ \psi$. Zeigen Sie, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\hom(V, W)$ gegeben ist.

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, W sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_5)$. Weiter sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, die durch die folgende Matrix bezüglich $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Schließlich seien $\mathcal{V}' = (v_1', \ldots, v_4')$ mit $v_1' = v_1 + v_2$, $v_2' = v_2 + v_3$, $v_3' = v_3 + v_4$, $v_4' = v_4$ und $\mathcal{W}' = (w_1', \ldots, w_5')$ mit $w_1' = w_1$, $w_2' = w_1 + w_2$, $w_3' = -w_1 + w_3$, $w_4' = w_1 + w_4$, $w_5' = w_1 + w_5$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}'$ eine Basis von V und $\mathcal{W}'$ eine Basis von W ist.

(b) Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{V}'$ und $\mathcal{W}$. Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{V}'$ und $\mathcal{W}'$.

6. Aufgabe (Präsenz):
Es seien $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_4)$$

und

$$g(x_1, x_2) := (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_1).$$

Sei $\mathcal{A} = ((1, 0, 1, 0), (1, 4, 2, 2), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 3, 0))$, $\mathcal{B}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = ((1, 3, 4), (2, 0, 1), (1, 1, 2))$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{C}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie $g \circ f$ und die Matrixdarstellungen von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, von g bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ und von $g \circ f$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$.